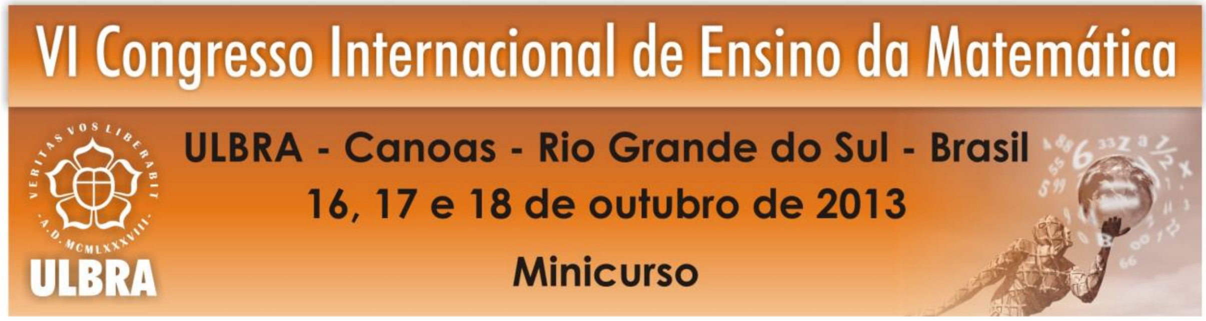


EXPERIÊNCIAS MATEMÁTICAS NO GEOPLANO

Marília do Amaral Dias [1]

RESUMO

O presente minicurso tem como objetivo desenvolver alguns conceitos matemáticos vinculados com a geometria plana, a geometria analítica e a trigonometria utilizando o Geoplano. O Geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas; num sentido mais exato, construir um suporte concreto de representação mental, um recurso que leva a realizar ideias abstratas. O Geoplano é um recurso facilitador do processo ensino-aprendizagem e auxilia no desenvolvimento de habilidades mentais necessárias à construção de raciocínio lógico-matemático, de forma prazerosa, e o trabalho matemático não será mais a memorização de fórmulas, mas sim, aquele conhecimento que o aluno compreende e constrói. Neste minicurso pretende-se trabalhar com diversas sugestões de atividades que oportunizem a exploração do Geoplano, em experiências de aprendizagem relativas à circunferência, funções trigonométricas, plano cartesiano, quadrantes, retas, ângulos, polígonos, perímetro, soma dos ângulos internos de polígonos convexos, número de diagonais, Teorema de Pitágoras, apótema e lado de polígonos regulares inscritos em um circunferência, áreas das principais figuras planas, Tangram, entre outras.

Palavras-Chaves: Geoplanos. Geometria. Polígonos. Trigonometria

INTRODUÇÃO

Para trabalhar com a geometria plana, a geometria analítica e a trigonometria optamos por utilizar, como recurso didático o Geoplano, em experiências de aprendizagem que levem o aluno a construir, guiado pelo pensamento lógico, seus próprios conceitos matemáticos, partindo do nível de aprendizagem em que se encontra, para que possa compreendê-los.

Em 1950, C Gattegno (Pedagogo e Matemático Inglês), Jean Piaget (Psicólogo) e G. Choquet (Matemático) fundaram a Comissão Internacional para o Estudo e Aprimoramento do Ensino da Matemática, destinada a pesquisar nesta área.

[1] Mestre em Ciência da Computação. Especialista em Matemática. Graduada em Matemática. Universidade Católica de Pelotas. marilia@ucpel.tche.br

Dessa comissão que organizava, usualmente, convenções em diversos países, com o objetivo de coordenar estudos e experiências realizadas, ainda que produzidas pelo mais modesto professor, fazia parte o idealizador do Geoplano, o Inglês Caleb Gattegno.

Geoplanos, do Inglês Geobords e do Francês Geoplans, pode ser utilizado na exploração de vários conteúdos ligados a Aritmética, Álgebra, Geometria (Plana, Espacial e Analítica) e Trigonometria.

Geoplano é um recurso didático que, manipulado adequadamente, auxilia na compreensão de alguns conceitos matemáticos. O Geoplano Retilíneo (Figura 1) é um tabuleiro de madeira, de forma quadrada ou retangular, de cor natural ou suave, onde se encontram linhas traçadas, formando uma rede quadricular e nos vértices destes quadrados, são fixados pregos ou pinos (Figura 3). Para a construção de conceitos relacionados à circunferência e o círculo utiliza-se o Geoplano Circular (Figura 2). Nas figuras 4 e 5 apresentamos outro tipo de Geoplano, o Geoplano Conjugado. Para representações geométricas usam-se atilhos coloridos (elásticos coloridos).

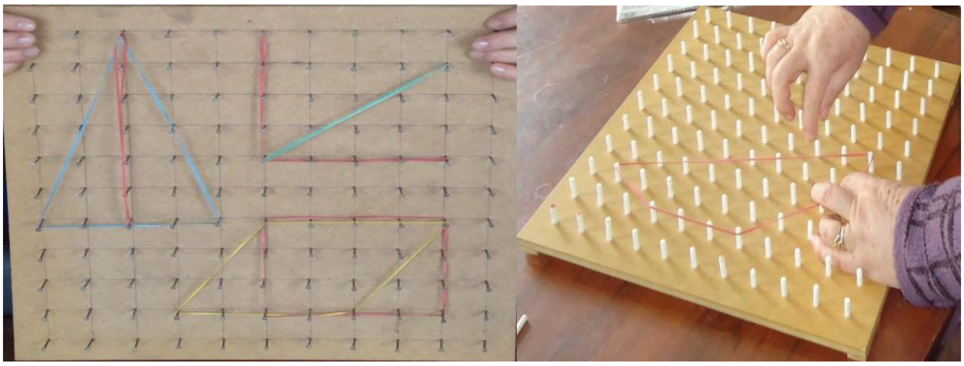


Figura 1 – Geoplano Retilíneo

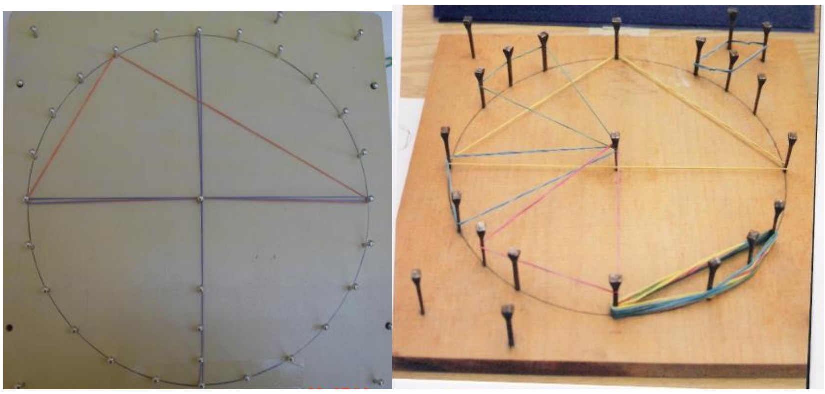


Figura 2 – Geoplano Circular

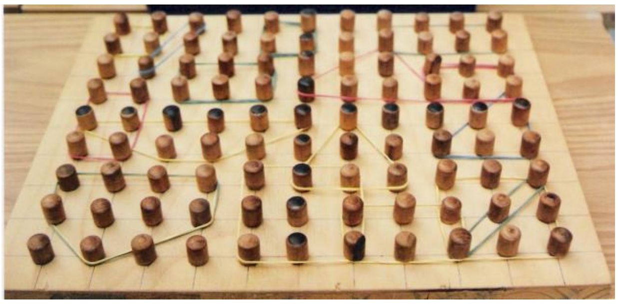


Figura 3 – Geoplano Retilíneo de Pinos (os eixos cartesianos destacados em preto)

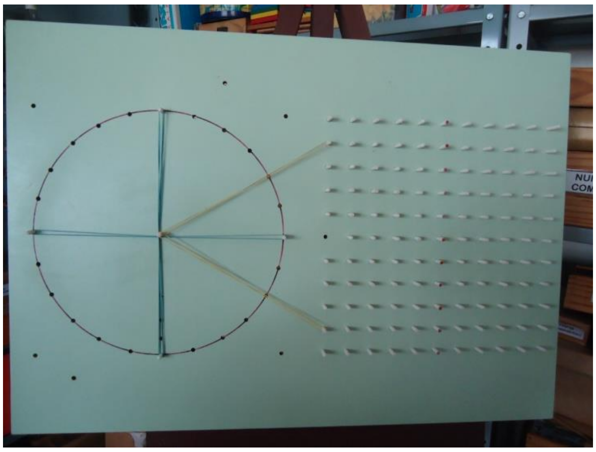


Figura 4 – Geoplano Conjugado (cavalete com Geoplano Retilíneo e Circular construídos no mesmo tabuleiro)

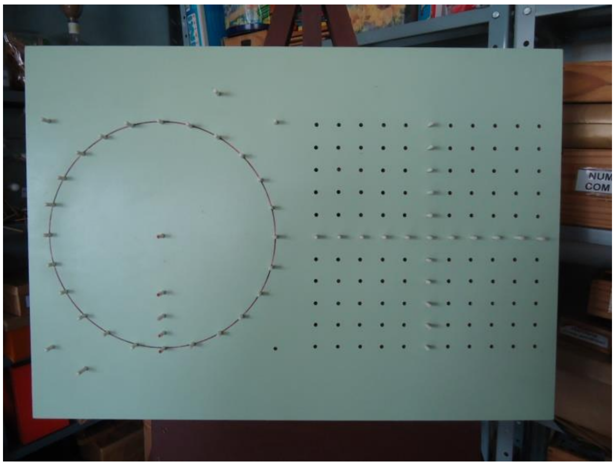


Figura 5 – Geoplano Conjugado: Retilíneo e Circular (explora-se conceitos matemáticos simultaneamente)

Este instrumento é um recurso didático que se pode classificar como múltiplo e dinâmico porque permite a representação de numerosas situações e possibilita o movimento da imagem das figuras no plano e no espaço.

Por ser um recurso dinâmico, o Geoplano sugere ideias e serve de suporte concreto para a representação mental. Não se deve esquecer que esse recurso é apenas um dos meios auxiliares do ensino. Cabe ao professor e ao aluno complementá-lo com outros meios instrumentais, para possibilitar a inter-relação entre o concreto e o abstrato.

Nas séries iniciais, deve-se usá-lo em propostas socializantes, incentivando a criança e cuidando para que manipule, explore o objeto, em interação com o mesmo, como primeiro passo no processo de assimilação, que deverá acontecer através das elaborações mentais, para chegar, posteriormente, ao desenvolvimento de conceitos e generalizações.

No início, a tabua deverá conter poucos pregos. Mais tarde, de acordo com as necessidades e o desenvolvimento do aluno, o número de pregos e o tamanho da tabua deverão ser maiores de acordo com um critério gradativo.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES

Para estas atividades deve-se considerar como unidade de medida, as distâncias entre os pregos colineares e consecutivos. Os vários tipos de Geoplanos apresentados fazem parte do acervo do Laboratório de Matemática da Universidade Católica de Pelotas/UCPel.

Atividades para séries iniciais

- Trabalhar retas e curvas (abertas, fechadas, quebradas...)
- Construir linhas horizontais e verticais.
- Construir as figuras fundamentais – quadrado, triângulo, retângulo, circulo, utilizando o geoplano retilíneo ou o geoplano circular (Figura 6).

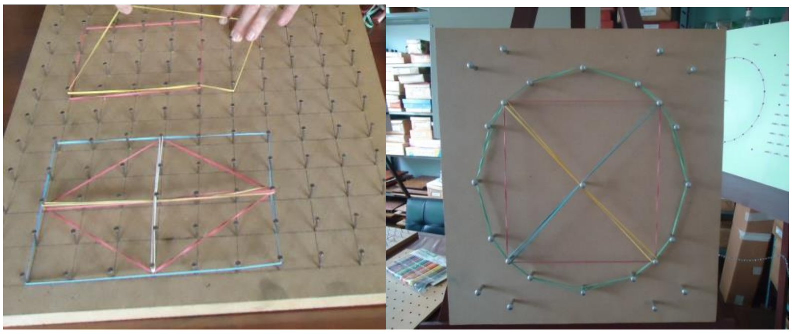
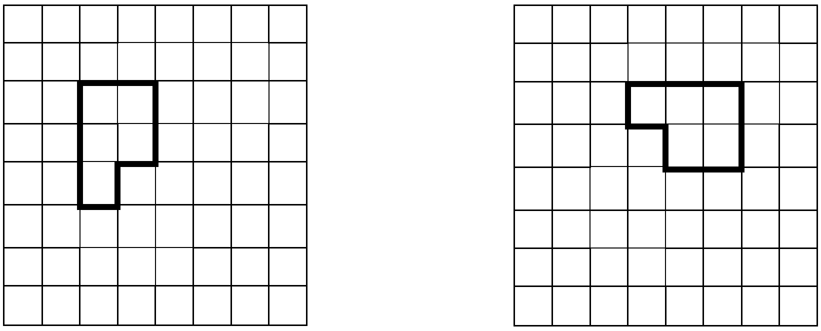


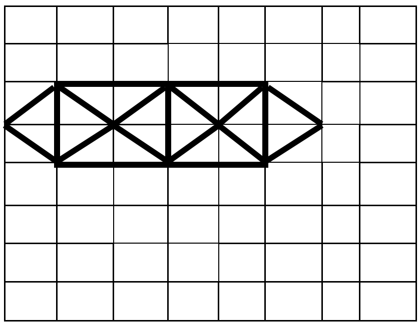
Figura 6 – Construção de figuras geométricas no geoplano

- Reconhecer figuras com os olhos fechados, seguindo a borda das mesmas, apenas pelo tato.
- Variar as dimensões das figuras.
- Identificar visualmente, as figuras independentes da posição (Figuras 7 e 8)



Figuras 7 e 8 – Movimentação/giro do geoplano

- Construir o retângulo por transformação do quadrado, esticando uma tira elástica correspondente a um dos lados opostos.
- Construir o triângulo por transformação do quadrado ou retângulo.
- Trabalhar as características de cada figura.
- Introduzir a nomenclatura: quadrado, lado, vértice...
- Reconhecer as figuras construídas nos geoplanos nos objetos da sala de aula.
- Permitir o reconhecimento do círculo e da circunferência no geoplano circular.
- Construir figuras geométricas no geoplano retilíneo e no circular (Figura 10).
- Representar uma situação como a seguinte no geoplano retilíneo e reconhecer figuras já estudadas (Figura 9).



Quantos Triângulos?

Quantos Quadrados?

Quantos retângulos?

Figura 9- Geoplano Retilíneo

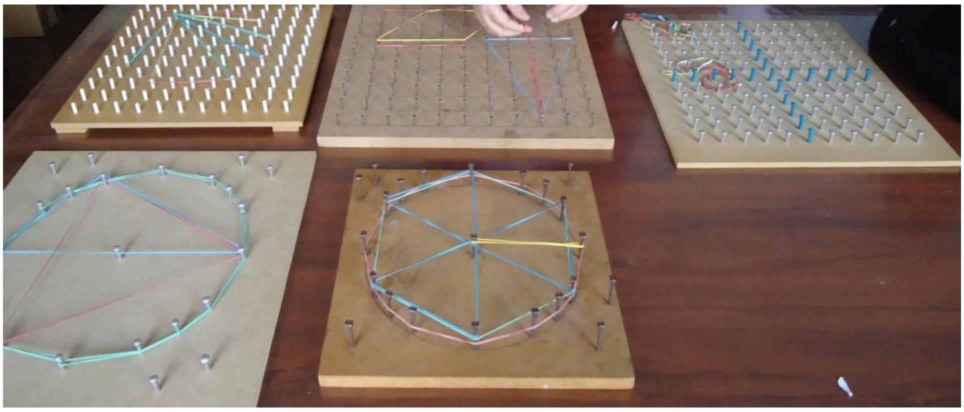


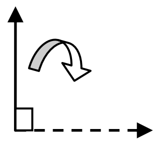
Figura 10 - Construção de figuras geométricas utilizando diferentes tipos de geoplanos (pregos e pinos)

- Construir um quadrado que seja a 3ª parte de um retângulo
- Construir um retângulo que seja o dobro de um quadrado.
- Construir um retângulo de base igual ao dobro da altura.
- Construir um quadrado cuja altura seja um quarto da base.
- Construir um quadrado cujo perímetro tem 16 unidades.
- Conceituar ângulos, determinando duas semi-retas superpostas de origem comum.
- Representar a abertura de um ângulo através de vários movimentos.
- Representar os demais quadriláteros por transformações dinâmicas das figuras conhecidas.
- Construir um triângulo que seja a metade do retângulo.
- Construir um quadrado que seja um quinto de um retângulo.
- Construir o menor e o maior quadrado possíveis: determinar o perímetro e a área. (de acordo com cada geoplano individual)
- Construir quadrados de todos os tamanhos possíveis.
- Construir um quadrado e um retângulo que tenham a mesma área.
- Construir diferentes retângulos, com o mesmo perímetro. Verificar qual deles tem a maior área.

Atividades para séries finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio

- Construir um triângulo isósceles cuja altura, seja o triplo da base.
- Construir um losango cuja diagonal maior seja o dobro da diagonal menor.

- Determinar posições de retas no plano: concorrentes, paralelas, coincidentes, perpendiculares. Sempre que um elástico está distendido entre os pregos representará uma reta ou semi-reta ou um segmento conforme convenha.
- Representar retas perpendiculares colocando um elástico vertical e movendo o geoplano ¼ de giro. Observamos que o elástico está noutra posição horizontal. As duas posições dos elásticos representam retas perpendiculares entre si.



- Representar no geoplano a seguinte figura e determinar quais das regiões assinaladas são polígonos convexos ou polígonos côncavos (Figura 11).

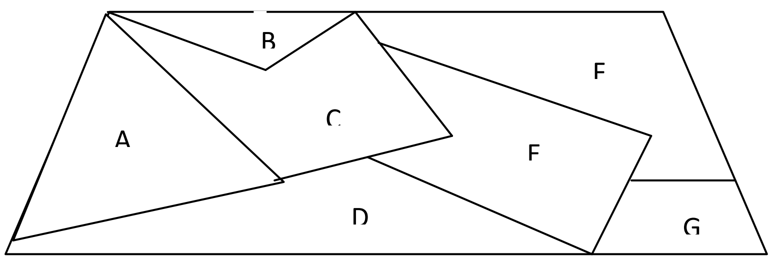
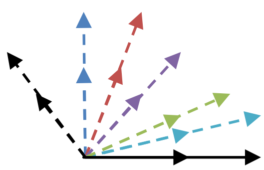


Figura 11 - Construção de polígonos côncavos e convexos

- Determinar ângulos – estende-se dois elásticos superpostos em uma fila de pregos do geoplano retilíneo. Com isso se quer representar duas semi-retas superpostas de origem comum.

  Levanta-se um dos elásticos pelo extremo comum e separa-se levemente do outro, estendendo-o no prego da fila imediatamente superior. A figura assim obtida é um ângulo.

  Após com o mesmo ou outro elástico de diferentes cores, pode-se repetir o movimento, aumentando a abertura do ângulo e variando o comprimento dos lados. Desta forma, os alunos descobrirão que a abertura de um ângulo é independente do comprimento dos lados.
- Identificar seus elementos e classificar ângulos.



- Representar um ângulo reto e representar sua bissetriz.
- Construir o complemento e o suplemento dos ângulos representados (Figura 12)

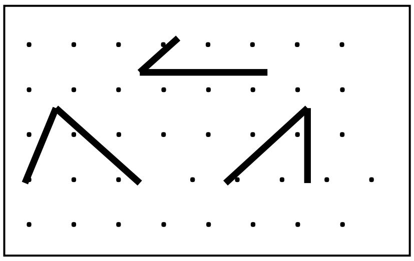


Figura 12 – Representação de ângulos no geoplano

- Construir triângulos e classificá-los quanto aos lados e quanto aos ângulos. É possível construir um triangulo equilátero no geoplano retilíneo? (Figura 13)

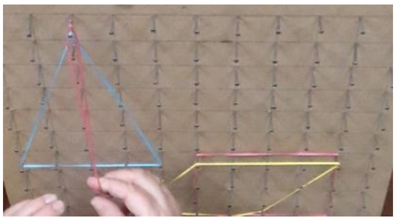


Figura 13 – Triâgulos

- Formar triângulos e determinar seus elementos notáveis (medianas – baricentro, bissetrizes – incentro, alturas – ortocentro, mediatrizes - circuncentro)

Dedução da fórmula do número de diagonais de um polígono

- Representar alguns dos polígonos: quadrado, pentágono, hexágono,.etc e escolher um dos vértices do polígono e construir todas as suas diagonais que partem deste único vértice. Após, preencher a planilha a seguir. O objetivo é deduzir a fórmula do número de diagonais de um polígono. Deve-se chegar a constante 3, que é a diferença entre o número de lados e o número de diagonais de cada vértice (Figura 14).

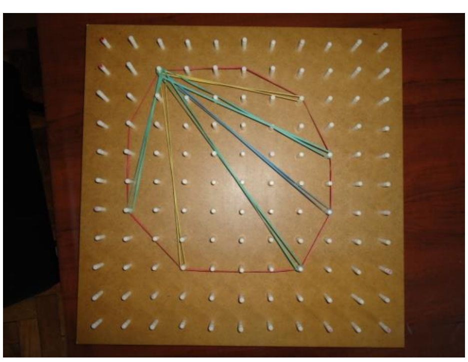


Figura 14 - Dedução do número de diagonais do eneágono

Polígono	Número de lados	Número de diagonais de cada vértice	Total de diagonais
Quadrado	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octógono	8		
Eneágono	9		
Decágono	10		
Undecágono	11		
Dodecágono	12		
....	.....		
Qualquer	n	n-3	$\frac{n(n-3)}{2}$

- Cada vértice dá origem à (n-3) diagonais;
- Os “n” vértices dão origem a n(n-3) diagonais;
- Divide-se por dois, pois cada diagonal foi contada duas vezes.

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo

- Construir diversos polígonos convexos no geoplano retilíneo e construir as diagonais que partem de um mesmo vértice do polígono (Figura 15). Após, preencher a planilha a seguir. O objetivo é deduzir a fórmula que dá a soma de seus ângulos internos.

Ao construir as diagonais que partem de um mesmo vértice, o polígono fica dividido em triângulos, cujo total é sempre o número de lados menos dois.

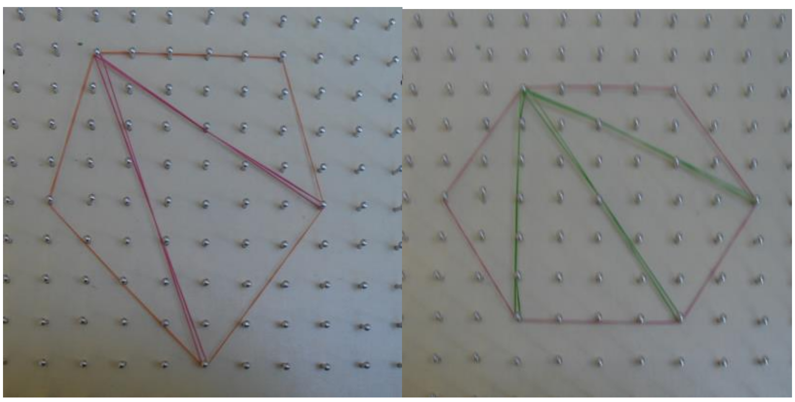


Figura 15- Soma dos ângulos internos do pentágono e do hexágono

Um polígono de n lados será dividido em (n-2) triângulos. Logo, para obter a soma de seus ângulos internos (S_n) basta multiplicar o número de triângulos por 180°, ou seja, (S_n) = (n-2) x 180°.

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma dos ângulos internos
Quadrado	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octógono	8		
Eneágono	9		
Decágono	10		
Undecágono	11		
Dodecágono	12		
....	.....		
Qualquer	n	n-2	(n-2) x 180°.

Dedução das fórmulas das áreas das principais figuras planas

- Construir quadrados, retângulos, triângulos, losangos, trapézios e realizar movimentos, transformações nessas figuras com o objetivo de deduzir as fórmulas para calcular suas áreas. Estas transformações são feitas a partir do retângulo (Figura 16).

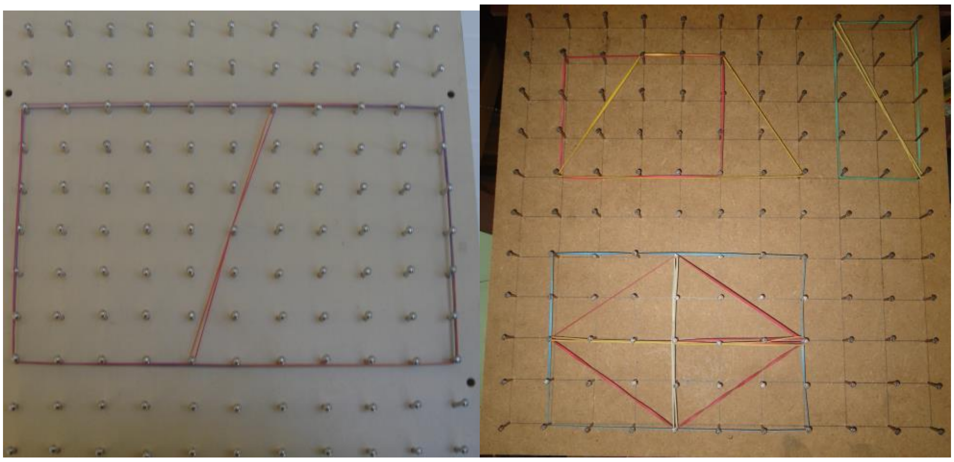


Figura 16 – Representação de figuras no geoplano retilíneo para dedução das fórmulas de áreas a partir de um retângulo

Adota-se, como unidade de área, o quadrado formado por quatro pregos. Tomando o retângulo como base, podem-se deduzir as fórmulas das outras figuras planas por transformações do retângulo (Figura 17). É conveniente que o aluno transporte para um papel quadriculado o que está sendo representado no geoplano para conclusão das áreas das diversas figuras formadas.

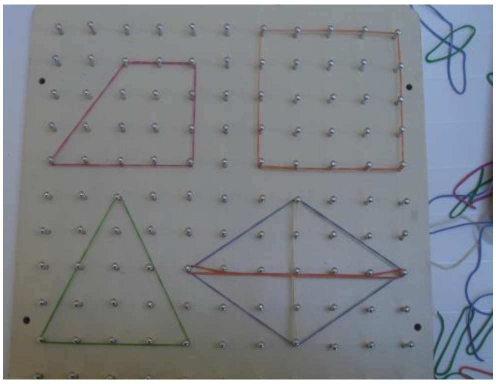


Figura 17- Figuras planas

Teorema de Pitágoras

- Construir triângulos retângulos. Após construir quadrados sobre a hipotenusa e sobre os catetos; realizar movimentos com o objetivo de concluir que o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$ (Figura 18).

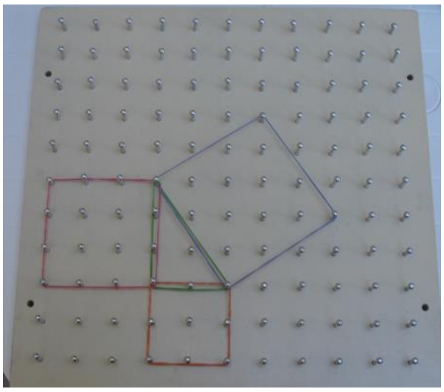


Figura 18 – Dedução do Teorema de Pitágoras

Tangram

- Construir as sete peças do Tangram: dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo (Figura 19).

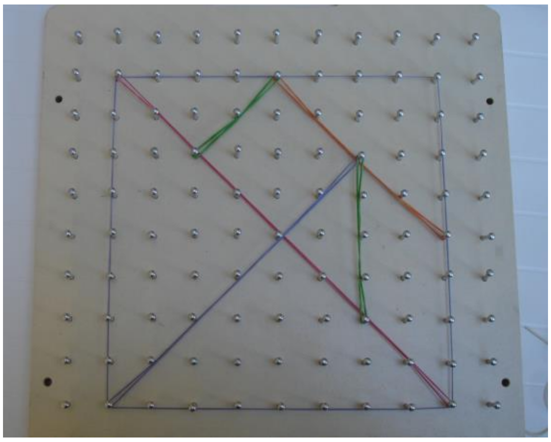


Figura 19 - Tangram

As seguintes atividades deverão ser realizadas no geoplano circular.

- Identificar e construir circunferência e circulo.
- Identificar elementos da circunferência: centro, arco maior, arco menor, corda, raio, diâmetro, ponto interior e exterior (Figura 20), ângulo central, ângulo inscrito, posições de retas em relação à circunferência, setor circular, segmento circular.
- Construir polígonos na circunferência.

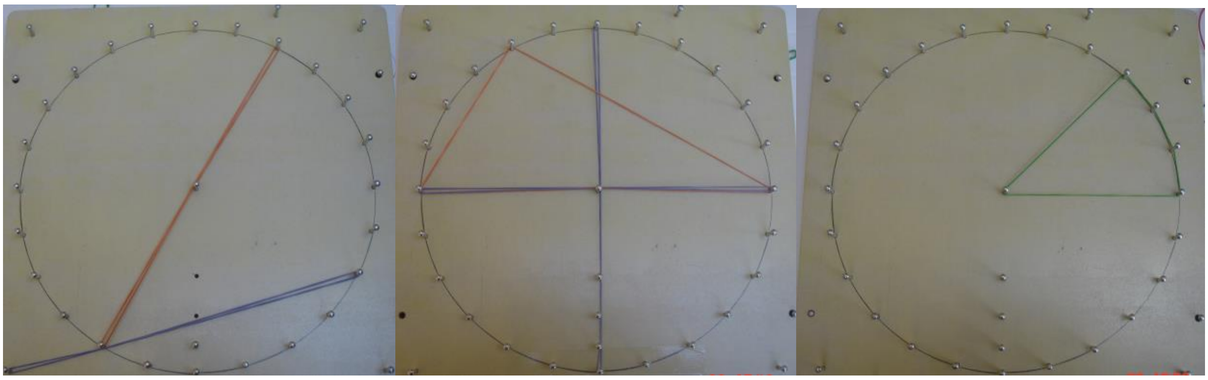


Figura 20- Elementos da circunferência

Polígonos Regulares Inscritos na Circunferência: cálculo do lado e do apótema

- Montar quadrado, hexágono regular e triângulo equilátero inscritos na circunferência (Figura 21) e realizar transformações, movimentos com o objetivo de deduzir as fórmulas para o cálculo da medida dos lados e dos apótemas desses polígonos (Figuras 22, 23 e 24).

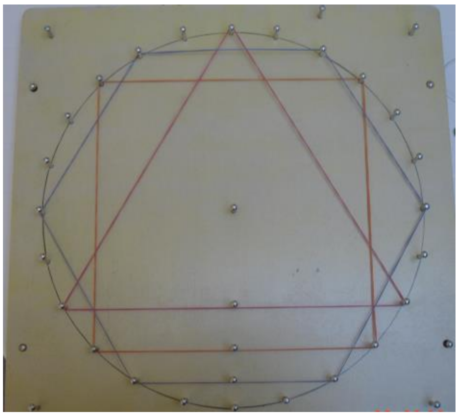


Figura 21 – Polígonos regulares inscritos na circunferência

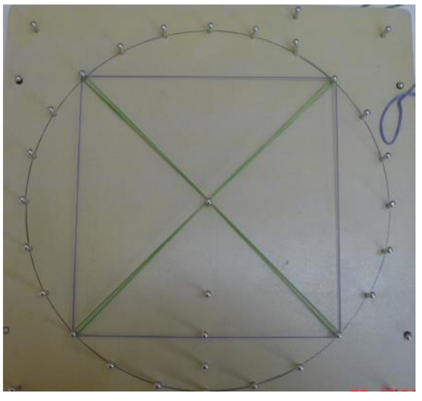


Figura 22 – Quadrado inscrito na circunferência

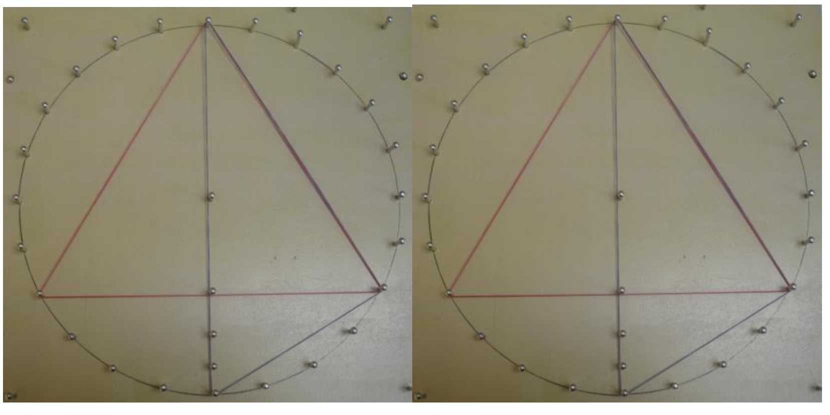


Figura 23 – Triângulo equilátero inscrito na circunferência

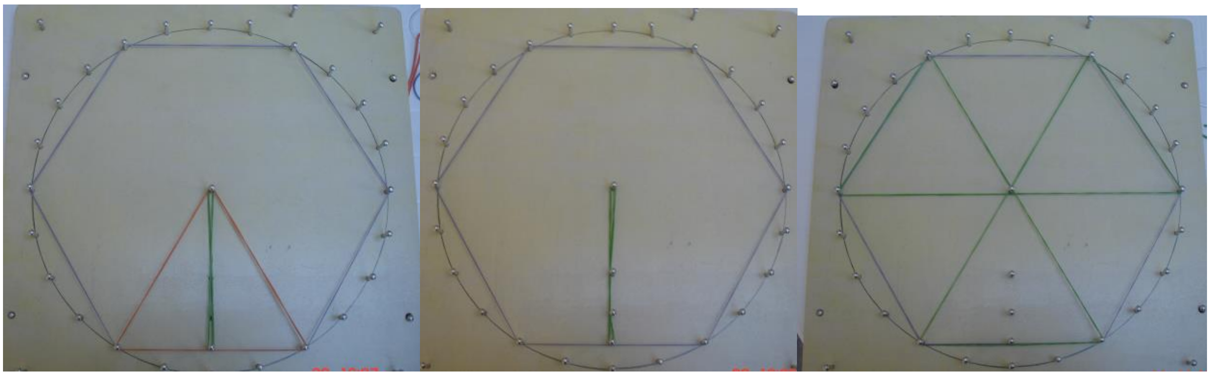


Figura 24 – Hexágono regular inscrito na circunferência

Funções Trigonométricas

- Explorar no geoplano circular as funções: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, considerando a circunferência orientada de raio unitário, r = 1(Figuras 25, 26 e 27).

- Provar a relação fundamental: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

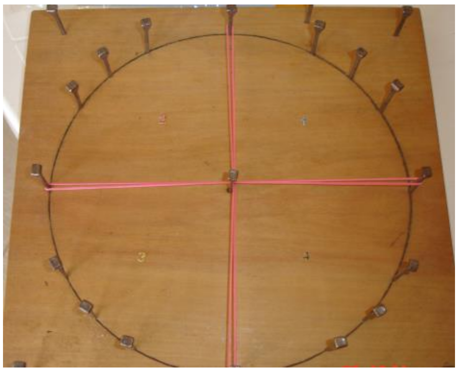


Figura 25- Ciclo Trigonométrico: quadrantes

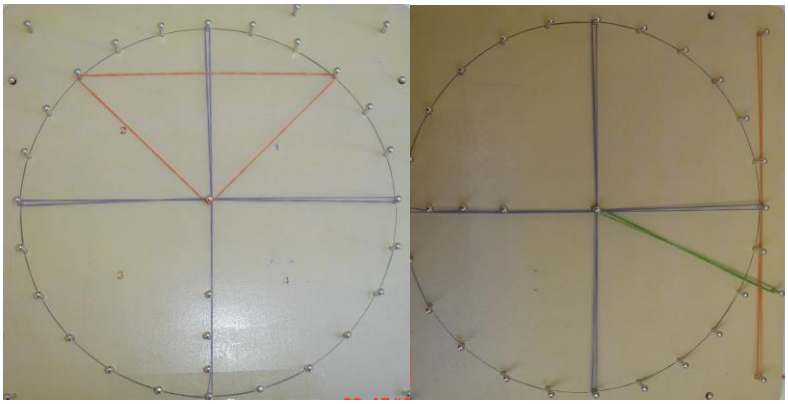


Figura 26 – Eixos trigonométricos (seno e tangente)

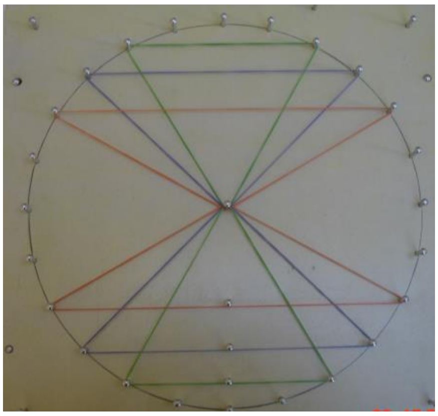


Figura 27 – Arcos notáveis

Geometria Analítica

- Reconhecer o Plano cartesiano
- Identificar o eixo dos x e o eixo dos y (Figura 28)
- Assinalar pontos no plano cartesiano
- Construir retas (Figura 29)
- Identificar função crescente e função decrescente

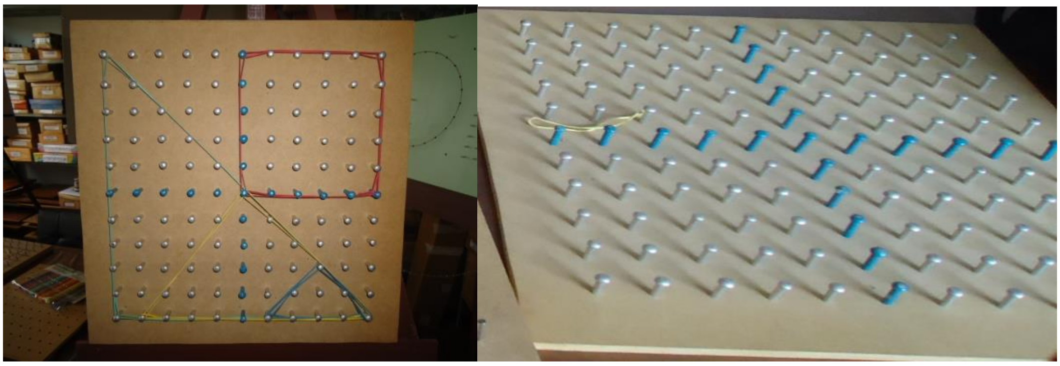


Figura 28 - Plano cartesiano

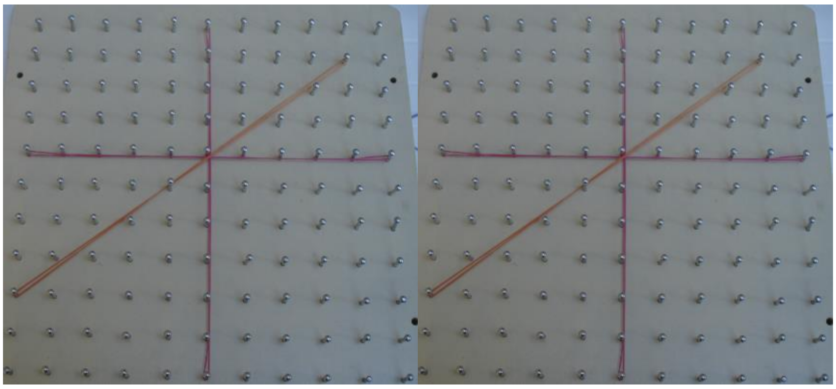


Figura 29- Retas no Plano

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de reflexões teórico-práticas é que abordamos, nesse minicurso, as utilidades do recurso Geoplano, em experiências de aprendizagem relativas à matemática. A partir dessas atividades sugeridas é possível pensar em muitas outras estratégias de utilização do Geoplano.

É importante salientar que, se quisermos um ensino que privilegie a construção do conhecimento lógico-matemático nas crianças e adolescentes, que lhes possibilite o sucesso na aquisição de conceitos, devemos reconhecer a importância de observar as etapas de desenvolvimento das estruturas do pensamento, necessárias ao conhecimento matemático.

O Geoplano é um recurso didático que, explorado adequadamente, auxilia no estudo de conceitos matemáticos. O Geoplano contribui promovendo possibilidades para a compreensão e exploração de novos conceitos matemáticos, em especial, conceitos relacionados à geometria plana.

É preciso considerar que muitas vezes, o aluno se vê à frente de regras superficiais e de símbolos desconhecidos, o que faz com que copie passivamente sem utilizar a sua capacidade de raciocínio. Portanto, é necessário promover atividades desafiadoras que despertem no aluno a curiosidade e o prazer de aprender.

É tarefa do educador organizar ambiente favorável à experimentação e à troca de experiências, criando oportunidades de interações, em que o aluno possa levantar hipóteses e chegar a conclusões. Sendo agente de sua aprendizagem, a criança será a construtora de seu conhecimento.

BIBLIOGRAFIA

CARVALHO, D. *Metodologia do Ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1997.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática:* da teria a pratica. São Paulo: Ática, 1997.

DANTE, L.R. *Matemática:* Contexto e Aplicações. São Paulo: Ática, 2007.

FAINGUELERNT, E.K.; NUNES, K.R.A. *Matemática:*Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio.Porto Alegra: Penso,2012.

IMENES, L;M. *Descobrindo o Teorema de Pitágoras.* São Paulo: Scipione, 1997.

KOBAYASHI, M.C.M. *A construção da geometria pela criança*. Bauru: ECDUSC, 2001.

LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1996.

MENDES, I.R.*;* SÁ, P.F. *Matemática por Atividades*: Sugestões para sala de Aula. Natal: Flecha do tempo, 2006.