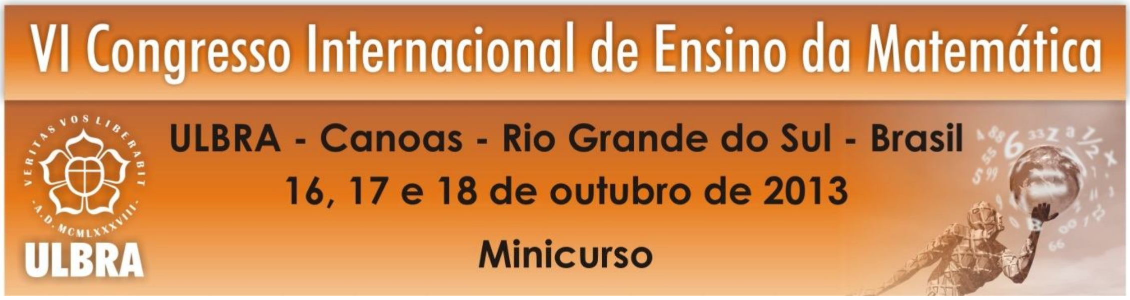


O SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL POSICIONAL E AS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS: EXPLORANDO OS ALGORITMOS COM A MANIPULAÇÃO DO MATERIAL DOURADO

Joelma Nogueira dos Santos[1]

José Rogério Santana[2]

Resumo: Este trabalho resume-se em uma oficina de matemática voltada para formação continuada de professores que ensinam matemática na educação infantil e nas séries iniciais, apresentada como produto educacional de uma pesquisa de mestrado. Explorar o sistema de numeração decimal posicional e as operações fundamentais com material concreto pode contribuir significativamente para a compreensão desses conteúdos matemáticos. Propomos trabalhar algumas técnicas e mostrar a relevância do material dourado como um recurso didático que auxilia o trabalho do professor que ensina matemática nessa etapa da Educação Básica. Desenvolveremos nosso trabalho inicialmente com uma base teórica sobre o sistema de numeração decimal posicional e as operações fundamentais, em seguida apresentaremos com o material dourado as técnicas necessárias para facilitar a aprendizagem do aluno. A metodologia utilizada para explorar esse tema é a Engenharia Didática de Michele Artigue apresentada por Machado (2008) e como técnica de mediação utilizaremos a Sequência Fedathi, também considerada uma teoria educacional desenvolvida por pesquisadores da Universidade Federal do Ceará, mostrada nos estudos de Borges Neto e Santana (2001). Trataremos desses conteúdos a partir de uma análise conceitual de maneira que possa contribuir ainda mais com a concepção do professor. Fundamentamos nossa proposta de trabalho em Ramos (2009), Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996), Domingues e Iezzi (2003) e Eves (2004).

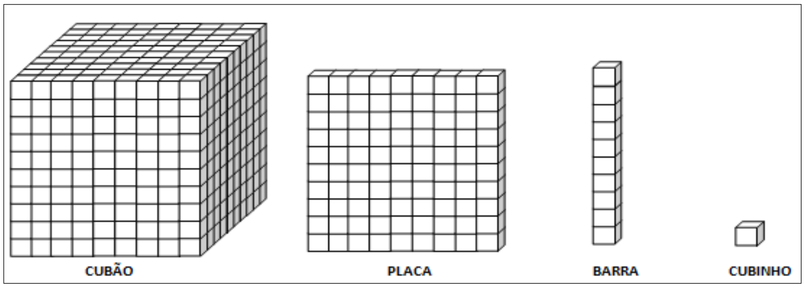
Palavras Chaves: Sistema de numeração decimal posicional. Material Dourado. Recurso didático.

O material dourado e o sistema de numeração decimal posicional

O material dourado é um material concreto que auxilia na compreensão do sistema decimal posicional. Com esse recurso didático o sujeito consegue fazer a imagem concreta das relações numéricas que são abstratas, proporcionando o desenvolvimento do raciocínio e de uma aprendizagem eficaz. É utilizado no auxílio dos algoritmos para efetuar as operações fundamentais. Sua aplicação vai de encontro ao método tradicional cuja técnica predominante é a memorização (KLINE, 1976; RAMOS, 2009).

[1] Mestre. Universidade Federal do Ceará. jnosant@gmail.com
[2] Doutor. Universidade Federal do Ceará. rogerio@virtual.ufc.br

Figura 01 – Material Dourado



Fonte nossa

A matemática começou a se desenvolver nos primórdios a partir das primeiras tentativas que o homem executou para compreender e estruturar o conceito de “grandeza, forma e número” (EVES, 2004, p. 25). Tanto a contagem como o conceito de número foi desenvolvida ainda nas civilizações primitivas. O homem desde os primórdios já tinha noção de contagem quando percebia o acréscimo ou a retirada de algum objeto de coleções organizadas por ele. À medida que o homem ia se desenvolvendo em comunidades, contar tornou-se uma prática comum de suas atividades diárias. Lima *et al* (2006) afirma que primeiro o indivíduo aprende a contar depois compreende a ideia de número.

Os egípcios e os babilônios, por exemplo, foram os primeiros povos a contribuir com o desenvolvimento da matemática, embora o homem primitivo tenha desenhado seus primeiros traços num passado distante. Os egípcios tinham um sistema de agrupamento de 10 em 10. Os babilônios utilizavam tanto o agrupamento de 10 em 10 quanto o de 60 em 60. Já os gregos utilizavam letras para a representação dos números, mas não havia uma base definida para utilização de seu sistema de numeração (KLINE, 1976; EVES, 2004; ARAGÃO, 2009).

Nosso sistema de numeração é denominado decimal posicional. É decimal porque a base de sua contagem é dez, ou seja, seu agrupamento é de 10 em 10. É posicional os algarismos têm um valor dependendo de qual posição ocupam no número, obedecendo o que Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 22) aponta como “princípio posicional”. Esse valor que o algarismo ocupa e que depende da posição é chamado de *valor relativo* e o valor dele prórpio é o *valor absoluto*.

Nele, cada grupo de dez unidades de uma ordem é substituído por uma unidade da ordem imediatamente superior. Posicional porque a escrita dos números é feita de forma sequencial e finita dos dez algarismos e que o valor deles depende de suas posições nas representações dos números. Quatro mil anos se passaram desde o surgimento dos sistemas de numeração escrita e o sistema que utilizamos atualmente, o indo-arábico (FERREIRA, 2011).

No número 397, o valor posicional do algarismo 3 é 300 unidades, 9 é 90 unidades e 7 é 7 unidades. Daí, temos $397 = 300 + 90 + 7 = 3x10^2 + 9x10^1 + 7x10^0 = 3x10^2 + 9x10^1 + 7$. Reforçando nossa ideia, Brizuela (2006, p. 27) afirma que,

> O sistema numérico escrito que usamos é representado por meio de dois elementos; a base dez e valor posicional. A base do sistema numérico escrito significa que tantas unidades de uma ordem formam uma unidade de ordem imediatamente superior. No sistema de numeração decimal (base dez), dez unidades de uma ordem formam uma unidade (1) de ordem imediatamente superior.

Podemos estruturar um sistema de numeração posicional em qualquer base $b \geq 2$. Embora o primeiro sistema de numeração decimal estruturado tenha sido o chinês, o nosso sistema de numeração indo-arábico é considerado o mais completo sistema desenvolvido. Nele podemos perceber a estrutura aditiva, a estrutura multiplicativa e a estrutura exponencial (DOMINGUES; IEZZI, 2003).

> Em nosso sistema de numeração – como é sabido –, o valor que representa cada algarismo se obtém multiplicando esse algarismo por uma determinada potência de base. Se um número tem mais algarismos que outro, necessariamente intervieram em sua decomposição potência de dez de *maior grau* que as envolvidas no outro, e em conseqüência será maior. Por outro lado, quando se trata de dois números com a mesma quantidade de algarismo – com exceção dos que começam com o mesmo algarismo – é o primeiro quem determina qual é o maior, porque esse algarismo indica por quanto deve ser multiplicada a potência de grau maior que "intervém" no número. Por razões semelhantes, se os primeiros algarismos forem iguais, a responsabilidade de determinar o número maior seria transferida ao algarismo imediatamente posterior, assim sucessivamente (LERNER; SADOVSKY; WOLMAN, 1996, p. 109,10).

Essa ideia do sistema de numeração decimal posicional é matematicamente sustentada por um teorema decorrente do algoritmo de Euclides, estudado na Teoria dos Números. Os números naturais podem ser representados por meio do sistema de numeração decimal, utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Esse sistema é conhecido como indo-arábico (LIMA *et al*, 2006).

Os números, os algarismos e os numerais

Desenvolvido pelos hindus e propagado pelos árabes, nosso sistema de numeração é conhecido como indo-arábico. O sistema foi composto inicialmente de nove símbolos e posteriormente criaram um símbolo para a representação de nenhuma quantidade (EVES, 2004).

Os símbolos de nosso sistema de numeração são denominados algarismos e assim são chamados devido ao matemático árabes *Al-Khowarizmi* que divulgou esse conhecimento matemático.

Figura 02– Desenvolvimento da escrita dos algarismos

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23508

Segundo Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 23): “Com dez símbolos $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\ e\ 9)$ e o valor posicional relacionado com a base 10, os hindus conseguiram construir um sistema que atravessou os séculos, sendo hoje universalmente usado”. O sistema de numeração é o aprimoramento da contagem e em nosso caso, com dez símbolos e algumas regras podemos formar o número que quisermos. Para Ramos (2009, p. 39), o sistema de numeração deciaml posicional “é a linguagem matemática que usamos no dia a dia. É uma linguagem estruturada, organizada e formalizada para expressar quantidades, posições, medidas, espaços, formas, relações etc”.

Usando os dez algarismos qualquer número pode ser formado e trabalhado com esse sistema. Mas qual é a diferença entre algarismo e número? E o numeral pode ser considerado número? Vamos estabelecer a diferença básica entre número, numeral e algarismo. Veja o quadro abaixo:

Quadro - 01 Definição de algarismo, número e numeral

Termos	Definição	Fonte
Algarismo	Símbolo numérico utilizado para expresssar quantidades denominadas números.	RAMOS, L. F. **Conversas sobre números, ações e operações:** uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos. São Paulo: Ática, 2009.
Número	Entes abstratos cujo desenvolvimento foi feito pelo homem e que servem de modelos para contar, medir as diferentes quantidades de uma grandeza.	LIMA, Elon L. *at al*. **A matemática do ensino médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 280p. (Coleção do professor de matemática, 1).
Numeral	Representação do número, seja ela escrita ou falada.	http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html

Fontes anexadas no quadro

A representação dos números naturais: a ordem e a classe

Ainda explorando o valor posicional, um algarismo em um numeral qualquer tem uma ordem e uma classe. Segundo Domingues e Iezzi (2003), cada agrupamento de 10 unidades corresponde a uma ordem e, cada grupo de dez unidades de uma ordem é substituído por uma ordem imediatamente superior.

Isso porque segundo Eves (2004), nosso sistema tem esse princípio e podemos representar um número natural N na base b da seguinte forma: seja $0 \leq a_i \leq b, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Temos que $N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + b_0$.

De acordo com Lima, Siani Filho e Couto Filho (1996, p. 41): “As ordens são numeradas da direita para a esquerda. Cada grupo de três ordens recebe o nome de classe. A última classe do numeral (a mais elevada) pode apresentar-se com menos de três ordens e, dessa forma é chamada incompleta”.

Quadro – Classes e ordens

...	CLASSE DOS SEXTILHÕES			CLASSE DOS QUINTILHÕES			CLASSE DOS QUATRILHÕES			CLASSE DOS TRILHÕES			CLASSE DOS BILHÕES			CLASSE DOS MILHÕES			CLASSE DOS MILHARES			CLASSE DAS UNIDADES SIMPLES		
...	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u

Fonte: elaboração nossa

Apresentamos a decomposição do número de duas maneiras:

1ª maneira: podemos decompor o número indicando o algarismo e a ordem que ele ocupa.

Exemplos:

(1) 56 → 5 $dezenas$ + 6 $unidades$
(2)128 → 1 $dezena$ + 2 $centenas$ + 8 $unidades$

2ª maneira: podemos decompor pela quantidade de unidades que cada número representa.

Exemplos:

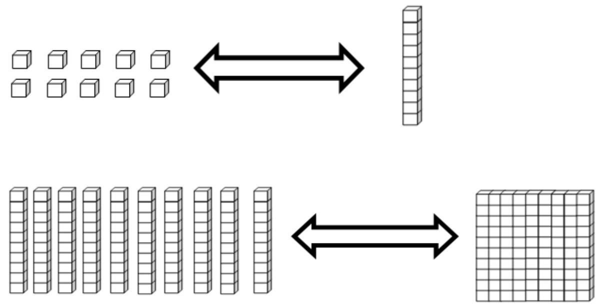
(1) 222 → 200 + 20 + 2
(2) 709 → 700 + 9

Trabalhando com o material dourado

Para trabalharmos a adição com e sem agrupamento precisamos entender a ideia de técnicas operatórias ou algoritmos de maneira que desenvolvemos a escrita dos números. De acordo com Ramos (2009, p. 97): “Técnicas operatórias, também chamadas de algoritmos, constituem procedimentos para resolver as operações fundamentais. Uma técnica é um registro escrito das ações realizadas; quanto mais próxima da nossa ação ela for, mais descritiva será”. Para explorar o material dourado num primeiro momento, propomos as atividades a seguir: reconhecimento das peças; registro de números a partir da manipulação das peças; manipulação das peças a partir da escrita; relação entre as ordens do sistema de numeração decimal posicional e as peças; inclusão de classes e hierárquica; exploração das ordens e das classes.

Nas operações fundamentais, podemos trabalhar com as formas expandida, abreviada e com a representação do Material Dourado. Na técnica expandida lidamos com a composição e a decomposição de números simultaneamente. Na técnica abreviada, embora pareça ser mais simples, força a ideia apenas de valor absoluto do número. Com a representação do Material Dourado fazemos a troca das peças em agrupamento de 10 em 10.

Quando agrupamos 10 *cubinhos* podemos trocar 01 *barra*. Quando agrupamos 10 *barras* trocamos por 01 *placa*. Quando agrupamos 10 *placas* trocamos por um *cubão*.



Segundo Ramos (2009), ao trabalharmos com o algoritmo abreviado, devemos ter o cuidado para não confundir os valores dos algarismos nas ordens, dando a eles o valor absoluto no lugar do valor relativo. Em todas as operações além dos algoritmos, utilizamos o próprio material dourado, juntando, agrupando e trocando peças, para que seja possível perceber no concreto o que se infere no abstrato. Nas operações fundamentais a proposta é explorar o algoritmo expandido ou com decomposição que mostra claramente as operações em transformação, o que não ocorre no algoritmo abreviado. As ideias que cada operação tem, os termos as operações e o caráter funcional de cada um também devem ser explorados.

Na adição e subtração apresentamos um tipo de algoritmo expandido ou com decomposição e um tipo de algorimo abreviado ou simplificado. Quando analisamos conceitualmente a operação multiplicação, percebemos as diferentes ideias acerca de sua compreensão. De acordo com Dante (2009) quando multiplicamos, adicionamos parcelas iguais. Mas quando contamos elementos a partir de uma disposição retangular, quando verificamos o número de possibilidades ou combinações em uma determinada contagem ou quando usamos a proporcionalidade, estamos multiplicando (GIOVANNI JÚNIOR, CASTRUCCI, 2009).

Usaremos aqui os nomes fatores e produto para os termos da multiplicação. Sabemos também que os termos podem ser chamados de multiplicando, multiplicador e produto. Trabalharemos com quatro tipos de algoritmos expandido ou com decomposição e dois tipos de algoritmos abreviados ou simplificados.

Já na análise conceitual da divisão vemos algumas ideias ligadas a sua compreensão. Apresentamos um tipo de algoritmo expandido ou com decomposição e dois tipos de algoritmos abreviados. Iezzi, Dolce e Machado (2009), afirma que quando dividimos repartimos quantidades iguais. Podemos também por meio da divisão saber quantas vezes uma quantidade cabe dentro da outra. Mesmo que as quantidades repartidas não sejam iguais temos uma divisão (LIMA, SIANI FILHO, COUTO FILHO, 1996; DANTE, 2009).

Referências bibliográficas

ARAGÃO, Maria José. **História da matemática**. Rio de janeiro: Interciência, 2009.

BORGES NETO, H.; SANTANA, J. R. Fundamentos epistemológicos da seqüência fedathi no ensino da matemática. *In*: XV EPENN _ ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORDESTE: EDUCAÇÃO, DESENVOLVIMENTO HUMANO E CIDADANIA, vol. Único, 2001, São Luís. **Anais...** São Luís: UFMA, 2001, p.594.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Tradução de Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto Alegre: Artmed, 2006.

DANTE, Luiz R. **Tudo é matemática.** 6º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DOMINGUES, Hygino H. IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna.** 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática.** 6º ano. São Paulo: FTD, 2009. (Coleção a conquista da matemática).

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade.** 6º ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

LERNER, D.; SADOVSKY, P.; WOLMAN, S. O sistema de numeração: um problema didático. *In:* PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.). **Didática da matemática:** reflexões e psicopedagógicas. Tradução de Juan Acunã Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996.

LIMA, Elon L. *et al.* **A matemática do ensino médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 280p. (Coleção do professor de matemática, 1).

LIMA, M. A. B.; SIANI FILHO, N.; COUTO FILHO, T. **Matemática...você constrói.** 5ª série, livro do aluno. Rio de Janeiro: Ediouro, 1996. 352p.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. (Séries Trilhas).

RAMOS, L. F. **Conversas sobre números, ações e operações:** uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos. São Paulo: Ática, 2009.