

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



CONCEITO IMAGEM, CONCEITO DEFINIÇÃO E O ENSINO DE LIMITE DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL

Heitor Achilles Dutra da Rosa¹

Pedro George Batista da Costa²

Processos cognitivos e linguísticos em Educação Matemática

Resumo: O presente trabalho apresenta uma pesquisa teórica bibliográfica na área de Ensino de Matemática e explora algumas reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento matemático avançado numa perspectiva cognitivista e ainda apresenta algumas sugestões para o ensino de limites de funções reais de uma variável, a partir das noções de conceito imagem e conceito definição propostas por David Tall e Shlomo Vinner.

Palavras Chaves: Ensino de Matemática. Conceito imagem. Conceito definição. Limites de funções reais de uma variável.

1. INTRODUÇÃO

Ao analisar alguns títulos de Cálculo diferencial e integral nota-se que ainda é marcante a presença de sequências didáticas que priorizam técnicas e procedimentos mecanizados que deixam, em segundo plano, o desenvolvimento de aspectos conceituais importantes para o processo de formação dos estudantes. Tais características são alvos de críticas de estudantes de graduação, assim como professores, pois embora reconheçam a importância do Cálculo diferencial e integral, para as mais diferentes áreas do conhecimento, também apresentam questionamentos quanto a sua forma de ensino.

Muitas sequências didáticas apresentadas em livros apresentam características que acabam resumindo o papel do Cálculo aos procedimentos que visam determinar tangentes, áreas e volumes com aplicações apenas dentro da própria Matemática. Em muitos cursos as aplicações passam despercebidas. No que se refere ao estudo de limites de funções de uma variável real, o que se vê, em grande parte, é a ênfase em recursos algébricos e a repetição de procedimentos exaustivos a partir de modelos pré-definidos. Porém, deve-se destacar que uma de suas importâncias está nas possibilidades de aplicações, principalmente no contexto da

¹ Mestre em Ensino de Matemática. IFRJ. heitor_achilles@yahoo.com.br

² Graduando do Curso de Licenciatura em Matemática. IFRJ. p.georgeifrj@ig.com.br

derivada e da integral.

Apesar de apresentar um referencial conceitual rico e importante, em muitos casos, o conceito de limite de uma função de uma variável real é tratado de forma burocrática, estéril e, descorrelacionada a qualquer tipo ou possibilidade de aplicação. Em particular, pode-se afirmar que isso acontece na maior parte dos cursos de Licenciatura em Matemática, o que caracteriza um ensino vazio de significados, que prioriza uma série de algoritmos e regras que, por si só, são apenas mecanizadas.

Ao considerar esses aspectos, verifica-se que ainda há muito o quê se pesquisar quanto ao ensino de Cálculo. Atualmente, ainda se verifica um ensino, na grande maioria das salas de aula, livresco, centrado no professor, que tem como função transmitir variadas informações driblando o tempo considerado, por muitos, insuficiente para tratar de tantos assuntos. Ainda é frequente a existência de ambientes de aprendizagens marcados por uma “aprendizagem” passiva cujo foco consiste na memorização e reprodução (que na maior parte dos casos consiste em imitação e ou repetição) precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelo livro.

No que se refere, particularmente, ao estudo de limites de funções reais de uma variável a situação não é muito diferente. Sendo assim, este trabalho busca investigar a natureza de sequências didáticas apresentadas em três livros didáticos de Cálculo, adotados nos cursos de graduação em algumas universidades brasileiras. A finalidade é avaliar as propostas de ensino do conceito de limite de função real de uma variável, sugeridas nos três títulos, a partir dos pressupostos teóricos sobre o processo de ensino e aprendizagem de matemática avançada, idealizados pelos pesquisadores David Tall e Shlomo Vinner (Tall; Vinner, 1981).

2. CONCEITO IMAGEM E CONCEITO DEFINIÇÃO

Para Vinner (1983) a formação de conceitos é de extrema importância para o processo de ensino e aprendizagem. Esse processo apresenta as seguintes dificuldades: a primeira relacionada à noção do próprio conceito e a segunda é a de determinar quando um conceito está corretamente formado na mente de um indivíduo. A fim de explicar esse processo cognitivo serão tomadas como base as noções de conceito imagem e conceito definição desenvolvidas por Tall e Vinner (1981).

A ideia central consiste no seguinte: quando um indivíduo ouve o nome de um conceito, ele produz um estímulo que aciona algo em sua memória caracterizado como conceito imagem. Dessa forma, pode-se afirmar que o conceito imagem é algo presente em nossa mente que associa uma coisa não verbal ao nome do conceito. Note que tais representações não verbais podem ser traduzidas por formas verbais, porém nem sempre essas últimas são precisas e ou as primeiras a serem evocadas por nossa mente. Por exemplo, quando falamos limite de uma função real de uma variável quando x tende ao número a pode vir a mente de um indivíduo a imagem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou ainda, $f(x) \rightarrow c$ quando $x \rightarrow a$.

O termo conceito imagem descreve então uma estrutura cognitiva total associada ao conceito. Essa estrutura total representa o conjunto de todas as imagens, propriedades e ou processos que alguma vez, na mente do indivíduo, foram associadas ao conceito. Daí pode-se perceber que à medida que o indivíduo tem novas experiências ao longo do tempo, referentes a um conceito, essas imagens vão sendo enriquecidas e dessa forma ocorre certa ampliação do conceito imagem.

Entende-se por conceito definição a definição verbal exata que explica, de forma precisa, um conceito. Nesse caso, pode-se afirmar que o conceito definição corresponde à definição matemática formal.

Tall e Vinner (1981) destacam que para que um conceito seja adquirido por um indivíduo é necessário que se forme um conceito imagem do mesmo. Apenas o conceito definição (a definição formal) não dá garantias para a verdadeira compreensão do conceito. Vale lembrar que para alguns conceitos certos indivíduos podem possuir simultaneamente um conceito definição e um conceito imagem. Além disso, alguns conceitos podem ser, inclusive, introduzidos por meio de definições que, nesse caso, podem ajudar na formação do conceito imagem. Diz-se para esse caso que a definição serviu de suporte para a construção do conceito imagem. Porém, muitas vezes, mesmo tendo como suporte para sua construção a definição, o que ocorre é que os indivíduos após formarem o conceito imagem de um conceito, acabam dispensando o conceito definição. Assim, a partir do momento em que o conceito imagem é formado, a definição pode permanecer inativa ou até mesmo esquecida.

Vinner (1983, 1991) cria um modelo explicativo para a construção de conhecimentos relacionados a tópicos da matemática avançada. Essa construção está baseada nas relações existentes entre conceito imagem e conceito definição. Ele assume que para cada um desses conceitos, existem células distintas na estrutura cognitiva, sendo uma para o conceito

definição e outra para o conceito imagem. Se nenhum significado for associado a um conceito então a célula conceito imagem apresenta-se vazia. Isso ocorre em muitas situações em que o conceito é apenas memorizado sem que tenha significado para o indivíduo.

Esse pode ser considerado um ponto importante e crucial no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite de uma função de uma variável real. Ou seja, definições como a que segue abaixo:

Seja f uma função definida para todo número real em algum intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no próprio a . O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L , escrito como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. (LEITHOLD, 1994, p.58)

costumam ser introduzidas precocemente, seja pela maior parte dos professores ou mesmo por sequências didáticas de cálculo. Embora, seja mais comum reconhecer a ideia de que deve haver, para gerar o enriquecimento de um conceito imagem, a realização de situações diversificadas para que os alunos possam adquirir com precisão o conceito definição, o que se vê na prática são esforços que não resultam no que se pretende. É nesse ponto que, geralmente, surgem as maiores dificuldades dos estudantes iniciantes. Em muitos casos, quando os estudantes conseguem decorar precisamente a definição, sem reconhecer o seu significado, acabam construindo (quando possível) a partir desse conceito definição, um conceito imagem pobre e vago associado, geralmente, a expressão “tende a” ou a notação utilizada para representar limites de uma função. Ou ocorre ainda a aquisição de um conceito definição frágil aplicável apenas a um número limitado de exemplos particulares.

O modelo idealizado por Vinner (1981) supõe a existência de uma interação entre o conceito definição e o conceito imagem, embora ambos possam ser construídos de forma independente. É possível que um indivíduo construa a partir de muitos exemplos um conceito imagem que pode ser mudado à medida que esse indivíduo entre em contato com situações não previstas nos exemplos inicialmente construídos; pode acontecer também que mesmo diante de novas situações que exijam mudanças e ou adaptações do conceito imagem, o mesmo permaneça inalterado, isto é, a definição do professor fica por algum tempo na célula e pode ser esquecida ou distorcida com o passar do tempo.

Há ainda uma terceira possibilidade em que ambas as células permanecem tal como foram construídas inicialmente. Os efeitos dessa terceira possibilidade refletem em ações em

que o aluno ao ser questionado pelo professor a respeito de um conceito definição, repete a definição do professor, mas em outras situações, não consegue aplicá-la de maneira precisa.

Para Vinner (1981) deve haver uma preocupação com a forma com que o modelo pode integrar algumas atividades matemáticas, em especial com a resolução de problemas. Isso porque ele reconhece que a formação dos conceitos não ocorre de forma única, ela variável, isto é, depende do desempenho dos sujeitos envolvidos. Por isso sugere, além da resolução de problemas, atividades que estejam voltadas aos processos de construção e identificação dos conceitos a fim de colocar o aluno em contato com tarefas cognitivas que permitam ativar as duas células: célula do conceito imagem e célula do conceito definição.

Tall (1983) também utiliza os termos conceito imagem e conceito definição, mas de forma diferenciada quanto à abordagem dada aos mesmos. Para Tall (1983) a mente deve ser pensada como a forma como o cérebro trabalha, sendo uma parte indivisível. Diante dessa perspectiva, Tall (1983) considera que o conceito definição não é mais do que uma parcela do conceito imagem total que existe na mente de cada indivíduo. Assim, o conceito imagem descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito. Já o conceito definição refere-se à forma das palavras usadas para especificar o conceito, mas onde este pode ser apreendido pelo indivíduo de uma forma rotineira ou de um modo mais significativa, sendo assim relacionado a um conceito global de estudo.

O conceito definição pode ser dado ao indivíduo ou construído pelo mesmo e pode ainda variar com o tempo. Dessa forma, podem-se distinguir dois tipos de conceito definição: o conceito definição pessoal e o conceito definição formal (aceito por toda a comunidade científica). Em cada indivíduo o conceito definição gera o seu próprio conceito imagem, o que para Tall e Vinner (1983, 1991) denomina-se imagem do conceito definição e que, portanto, pode ser considerado conceito imagem. Vale destacar que para alguns indivíduos ele pode não existir e para outros pode ou não ser coerentemente relacionado com outras partes do conceito imagem.

3. SOBRE O ESTUDO DE LIMITE DE FUNÇÕES EM TRÊS REFERÊNCIAS DE CÁLCULO

A partir das noções de conceito imagem e conceito definição idealizadas por Tall e Vinner (1981), pode-se afirmar que as dificuldades de aprendizagem de limites de funções, de grande parte dos estudantes, se deve a uma ideia imprecisa da definição de limites de funções

reais de uma variável, e que essa concepção provoca erros até mesmo em situações consideravelmente simples. Isso aliado à falta de contato com uma variedade ampla e suficiente de exemplos e situações, provoca um empobrecimento das imagens conceituais formadas. A partir de tais pressupostos foram analisadas três sequências didáticas referentes ao tópico de limites de funções de uma variável real, apresentadas nas seguintes referências:

- Livro I: O Cálculo com Geometria Analítica – Louis Leithold – Volume 1. São Paulo: Harbra, 1994;
- Livro II: Cálculo - James Stewart - Volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2009;
- Livro III: Cálculo – Laurence D. Hoffmann e Gerald L. Bradley – 7ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

A análise descrita considerou os seguintes elementos: linguagem utilizada, exploração de problemas que levam a construção da ideia de limite, apresentação da definição formal de limite e a apresentação de exercícios diversificados.

No livro I a noção de limite é explorada a partir de um exemplo que apresenta a função $f(x) = (2x + x + 3)/(x - 1)$. Por haver restrições no domínio quando $x = 1$, na função $f(x)$. O autor nos leva a perceber o que acontece com a imagem desta função quando $x \rightarrow 1$, excluindo o 1, e para isso é necessário à utilização de tabelas. Este exemplo surge como ponto-chave para introduzir uma linguagem mais precisa que inclui o uso de ε e δ . Após considerar alguns valores para ε e δ , o autor apresenta a definição formal seguida de exemplos- apresentados na mesma linha do primeiro. A apuração feita nos mostra que não há referências na obra quanto ao surgimento do conceito de limite, bem como, a falta de problematizações. O que se viu foi o predomínio de uma linguagem matemática formal em detrimento do uso de uma linguagem natural. Além disso, neste capítulo não há a preocupação em propor uma grande variedade no padrão de exercícios. Quanto à formação da imagem conceitual, acredita-se que o uso apenas dessa obra pode gerar uma imagem restrita do conceito de limite, pois a mesma estabelece como foco central a definição formal desse conceito, prematuramente.

O livro II relata inicialmente uma discussão histórica que parte de problemas de cálculo de áreas. Em seguida a determinação de retas tangentes e velocidade e, dessa forma, justifica o surgimento de limites. Seguindo uma abordagem construtiva num segundo momento, o autor retoma essa discussão e estabelece como exemplo a determinação da reta tangente à parábola $y = x$ no ponto $(1, 1)$ e apresenta simbolicamente o limite pela primeira vez. Em seguida, o

autor propõe um problema contextualizado cujo tema refere-se ao flash de uma câmara fotográfica. O objetivo é restringir a ideia de limite ao contexto geométrico. A aplicação contribui para uma melhor formação da imagem conceitual, uma vez que não se restringe a uma única forma de apresentação do conceito. Após essas discussões surge a definição de limite. As atividades propostas são diversificadas e algumas sugerem o uso das novas tecnologias. A abordagem permite que o aluno tenha acesso ao conceito de forma gradativa e que considere vários aspectos, esses pontos favorecem significativamente a formação do conceito imagem e, conseqüentemente, a formação do conceito definição.

O livro III apresenta uma abordagem intuitiva de limite, utilizando a função como exemplo a função $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x - 1)$. São feitas investigações referentes aos valores de $f(x)$ quando $x \rightarrow 1$, excluindo o 1, e para isso o autor recorre à utilização de tabelas, o mesmo feito no livro I. Em seguida, é apresentada uma interpretação geométrica a partir de gráficos. Em seguida, são apresentadas as propriedades algébricas de limites. Não é apresentada a definição formal a partir de ε e δ , dando continuidade a exemplos novamente na linha do primeiro livro. Nota-se que a imagem conceitual trabalhada ainda é restrita, a não apresentação da definição formal a partir de ε e δ , e a falta de problematização causa uma construção limitada na definição do conceito de limite de funções reais de uma variável.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A difícil natureza do conceito de limite exige análises cuidadosas de como são feitos os encaminhamentos didáticos presentes nos livros de cálculo. É necessário repensar as formas com as quais o ensino de cálculo, em especial, o de limites, vem sendo tratado por muitos professores e por seqüências didáticas presentes em vários livros. Torna-se urgente equacionar as formas de ensino para que a prioridade seja estabelecer espaços de aprendizagens onde os estudantes não tenham que recorrer à memorização por não conseguirem dar significado a teoria formal que lhes é apresentada. Nesse sentido acredita-se que uma proposta de ensino de limites de uma função real de uma variável baseada nas noções de conceito imagem e conceito definição, propostas por Tall e Vinner, possam contribuir para a formação de indivíduos críticos e reflexivos que não só compreendem o significado de épsolons e deltas podem em definições formais, mas que são capazes de utilizá-los para intervir no mundo em que vivem.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significado no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral*, 1999. Tese de doutorado em Educação. Faculdade de Educação. USP – São Paulo.
- DOMINGOS, A. M. D. *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior*. Tese de Doutorado em Ciências de Educação. Universidade de Nova de Lisboa. Lisboa, 2003.
- HOFFMAN, L.D; BRADLEY, G. L. *Cálculo*. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- LEITHOLD, L. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Harbra, 1994.
- SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E.; Harel, G. (Ed.). *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology*, 1992. p. 25-58. (Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, vol. 25).
- STEWART, J. *Cálculo*. v.1. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Mc Graw Hill, 1994.