

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil
16, 17 e 18 de outubro de 2013
Comunicação Científica



A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE MAXIMA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO ACERCA DO DOMÍNIO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Fabio Luiz de Oliveira¹

Regina Helena de Oliveira Lino Franchi²

Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

Resumo:

O presente texto apresenta um recorte de uma pesquisa em andamento que busca investigar a contribuição das tecnologias para criação de ambientes de aprendizagem favoráveis à produção do conhecimento matemático acerca de funções de várias variáveis. Neste texto descrevemos e comentamos uma atividade desenvolvida com alunos da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, com o objetivo de explorar gráficos e domínios de funções de duas variáveis, utilizando o software MAXIMA. Para planejamento das atividades e interpretação dos resultados utilizamos a perspectiva de que o conhecimento matemático é produzido por coletivos de seres-humanos-com-mídias. Os resultados parciais indicam contribuições das mídias utilizadas, especialmente no que diz respeito às possibilidades de manipulação das imagens e de visualização, para construção de conhecimento pelos alunos acerca do domínio de funções de duas variáveis.

Palavras-Chave: Função de duas Variáveis. Tecnologias Digitais. Seres-humanos-com-mídias. Software MAXIMA.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos uma pesquisa que está sendo desenvolvida pelo primeiro autor e orientada pela segunda, no âmbito do Mestrado Profissional em Educação Matemática

¹ Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. professorfabio.oliveira@gmail.com

² Doutora em Educação Matemática. Docente da Universidade Federal de Ouro Preto. reginafranchi@uol.com.br

da Universidade Federal de Ouro Preto e que tem como objetivo principal investigar as contribuições da utilização das tecnologias digitais para a construção do conhecimento matemático acerca das funções de várias variáveis.

O interesse pelo tema da pesquisa vem da experiência de atuação docente do pesquisador (primeiro autor desse trabalho), no ensino superior nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral³ nos cursos de Engenharia. Alguns fatos que provocaram inquietações foram: o elevado número de alunos que chegam ao ensino superior sem uma formação sólida na matemática básica, o alto índice de reprovações desta disciplina, as dificuldades de aprendizagem e de atribuição de significados por parte dos alunos aos conceitos de Cálculo e as dificuldades para relacionar e utilizar os conceitos de Cálculo em outras áreas do curso. No caso específico de funções de várias variáveis, adicionam-se a estas dificuldades apresentadas as relativas à transição do Cálculo de uma variável para o Cálculo de várias variáveis.

Considerando a importância do Cálculo como disciplina básica, presente em grande número de cursos superiores no Brasil, e também as dificuldades acima apontadas com relação ao seu ensino, torna-se relevante pesquisar alternativas para o trabalho com a disciplina.

2 Trazemos para este trabalho um recorte da pesquisa em andamento, focalizando especificamente o desenvolvimento de atividades com uso do software MAXIMA⁴ para abordagem do gráfico e domínio de funções de duas variáveis.

3 SOBRE OS FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA PESQUISA

Essa pesquisa se fundamenta teoricamente nas publicações sobre o uso de tecnologias digitais na Educação Matemática e particularmente no ensino de Cálculo. As pesquisas sobre ensino de Cálculo também serão consideradas, especialmente as que se referem ao Cálculo de funções reais de várias variáveis.

Sobre as tecnologias, pode-se dizer que estão presentes nas atividades diárias e também no cotidiano de alunos e professores. Em nossa atuação docente nos deparamos com a presença cada vez maior de celulares, tablets e computadores nos contextos escolares. Entendemos que a simples presença da tecnologia não garante melhoras no ensino. Para Machado (2008) as tecnologias digitais têm influenciado e provocado mudanças nas formas

³ Usaremos daqui em diante a palavra “Cálculo” para nos referirmos ao “Cálculo Diferencial e Integral”

⁴ Disponível em <http://maxima.sourceforge.net/>

de ver, utilizar e produzir Matemática. Uma das possibilidades de promover mudanças que contribuam para a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática é a constituição de ambientes com a presença de tecnologias nos quais os estudantes tenham oportunidade de explorar situações novas, experimentar, testar suas conjecturas, favorecendo assim a aprendizagem. Skovsmose (2000) caracteriza diferentes tipos de ambientes de aprendizagem e entre eles os que dão suporte a trabalhos de investigação, os quais chama de “Cenários para investigação”. O autor destaca a possibilidade das tecnologias favorecerem o estabelecimento desses cenários:

Os computadores na educação matemática têm ajudado a estabelecer novos cenários para investigação (embora alguns programas fechados tentem eliminar incertezas, ajustando as actividades ao paradigma do exercício). O computador desafiará a autoridade do professor (tradicional) de matemática. Alunos trabalhando com, por exemplo, geometria dinâmica facilmente encontram possíveis situações e experiências que os professores não previram ao planejarem a aula (SKOVSMOSE, 2000, p. 66)

Entre as muitas possibilidades de uso das tecnologias favorecendo a aprendizagem da Matemática estão: a facilidade de obtenção de respostas, as possibilidades de realizar simulações e de efetuar cálculos numéricos e algébricos de forma cada vez mais rápida, as possibilidades de visualização, entre outras. Segundo Kawasaki (2008, p.43), “[...] parece haver consenso entre educadores matemáticos sobre o valor pedagógico da visualização no ensinar e no aprender e até mesmo no “fazer” Matemática.”

A ideia de que o computador oferece a possibilidade de observar processos de construção de conhecimento matemático que não apareçam em outros ambientes é defendida por Villarreal (1999). Para essa autora esses processos vão além do simples uso do computador para resolver um determinado problema matemático, privilegiando a compreensão conceitual em vez da aprendizagem da técnica.

Borba e Villarreal (2005) defendem que o conhecimento é construído por coletivos de atores humanos e não humanos. Apoiam-se nas noções de reorganização do pensamento de Tikhomirov (1981) e nas ideias de Levy (1993) referentes ao pensamento coletivo.

Levy (1993) utiliza a noção de tecnologias da inteligência para relacionar três técnicas que estão associadas à memória e ao conhecimento: a oralidade, a escrita e a informática. Estas tecnologias da inteligência são consideradas extensões da nossa memória. De forma análoga para Borba e Villarreal (2005) a informática pode ser entendida como uma nova extensão da memória:

A tecnologia da informação deve ser entendida da mesma maneira. É uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação a outras tecnologias da inteligência, e torna possível para o raciocínio linear a ser desafiado por outras formas de pensar, baseada em simulação, experimentação, e uma 'nova linguagem' que envolve a oralidade, escrita, imagens, e comunicação instantânea (BORBA e VILLARREAL, 2005. P. 22).

Para Borba e Villarreal (2005) um ponto comum entre as ideias de Tikhomirov (1981) e Levy (1993) é que não deve haver dicotomia entre técnica e seres humanos. Dessa forma coletivos formados por seres-humanos-com-mídias devem ser vistos como a unidade básica que produz conhecimento.

A respeito do Cálculo de funções de duas variáveis Alves (2011) discute sobre o processo de transição interna do Cálculo de uma variável real para o Cálculo de várias variáveis, estabelecendo uma comparação com a transição do escolar para o ensino da matemática no ambiente universitário.

Aspectos relativos a esse processo de transição e à produção de conhecimento matemático por coletivos formados por seres-humanos-com-mídias foram observados na elaboração das atividades e subsidiarão a análise dos dados obtidos na pesquisa.

4 METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA

A pesquisa de campo foi realizada no primeiro semestre de 2013, em uma Instituição privada de Ensino Superior localizada no interior de Minas Gerais. A escolha para o desenvolvimento da pesquisa nesta Instituição deve-se ao fato do pesquisador exercer suas atividades docentes neste local. As atividades foram desenvolvidas nas aulas regulares da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, sob a responsabilidade do pesquisador, com a participação de 43 alunos. Foram realizados 10 encontros para o desenvolvimento das atividades, de acordo com o cronograma da disciplina. Parte desses encontros foi utilizada para atividades com uso de tecnologias digitais e parte para discussões e sistematizações de conteúdos em sala de aula, tendo como base as atividades desenvolvidas com utilização de software. Para os trabalhos os alunos foram organizados em pequenos grupos.

Os instrumentos utilizados para a coleta dos dados foram os relatórios produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades, questionários respondidos pelos alunos, provas escritas e a observação do pesquisador.

A análise ainda não foi realizada e será feita com base nos pressupostos da metodologia de pesquisa qualitativa, considerando eixos identificados a partir do referencial teórico escolhido ou outros que emergirem no processo de exame dos dados obtidos.

5 A ESCOLHA DO SOFTWARE MAXIMA

O MAXIMA é um sistema de *computação* algébrica (CAS⁵) originado do Macsyma que foi desenvolvido no MIT (Massachusetts Institute of Technology) nos anos de 1968 a 1982 como parte do Projecto MAC (Machine Aided Cognition). Trata-se um software livre de licença GNU General Public License (GPL), disponível para diversos sistemas operacionais como Windows e Linux. Desta forma é acessível à comunidade acadêmica.

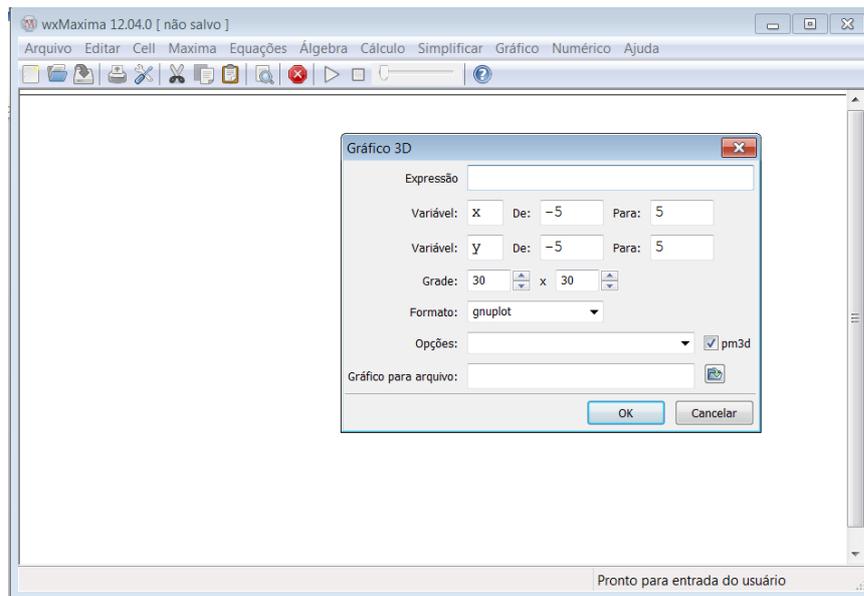
Sendo um software tipo CAS viabiliza o tratamento simbólico, o que possibilita obter resultados para boa parte dos conteúdos usualmente trabalhados nas disciplinas de Cálculo como limites, derivadas e integrais de funções reais de uma ou mais variáveis reais. Além disso, possibilita abordagens numéricas e gráficas. No caso específico de funções de duas variáveis, que é o interesse desta pesquisa, além dos cálculos numéricos e algébricos, é possível esboçar e manipular gráficos em três dimensões, com diferentes possibilidades de visualização.

O MAXIMA possui duas interfaces: WxMAXIMA e xMAXIMA. Por meio das duas interfaces é possível obter os mesmos resultados em termos de cálculos e gráficos. Porém a WxMAXIMA é mais interativa com o usuário e possui uma interface gráfica que permite o acesso às funções através de menus e caixas de diálogos. Na Figura 1, a tela do wxMAXIMA, com a janela para a construção de um gráfico de uma função de duas variáveis. Na Figura 2, a tela inicial da interface xMAXIMA.

Para essa pesquisa optamos pelo uso da interface wxMAXIMA, na versão do 5.28 do MAXIMA, pois consideramos que o aluno teria mais facilidade para utilização, o que poderia facilitar a manipulação e a exploração dos conceitos matemáticos por meio das atividades propostas, permitindo ao aluno “transitar” com objetos construídos nas formas algébrica, numérica e gráfica.

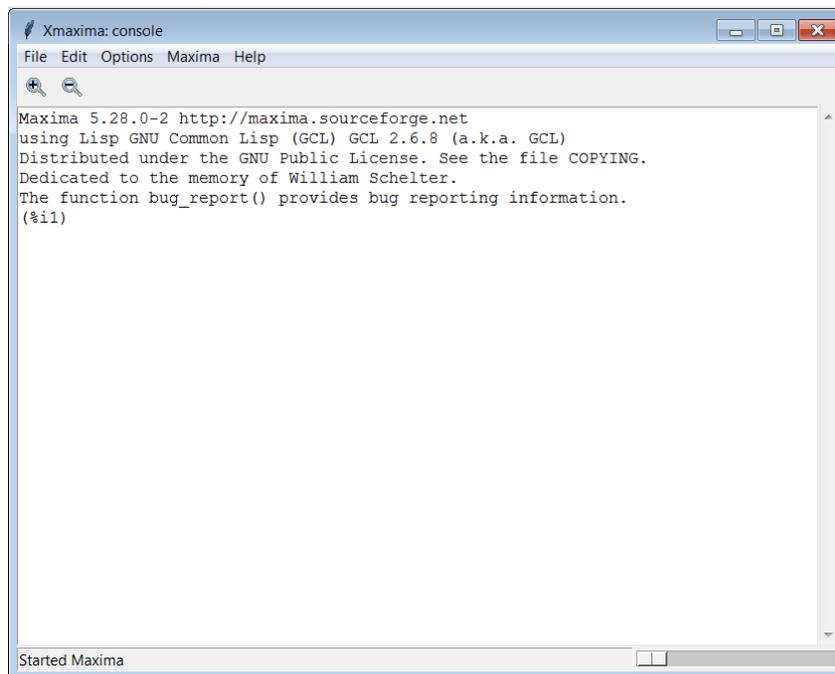
⁵ Computer Algebra System

Figura 1 - Tela da interface wxMAXIMA



Fonte: Produção dos autores

Figura 2 - Tela da interface xMAXIMA



Fonte: Produção dos autores

Elaboramos atividades aproveitando os recursos que o software proporciona e, ao mesmo tempo, estimulando a exploração pelos estudantes e a interação entre os participantes. Entendemos que o ambiente construído, constituindo um coletivo seres-humanos-com-mídias pode proporcionar a elaboração de conjecturas e a construção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis.

6 DESCRIÇÃO COMENTADA DE UMA ATIVIDADE DESENVOLVIDA

As atividades foram concebidas considerando a possibilidade de construção de conhecimento matemático em um coletivo constituído por seres-humanos-com-mídias (Borba e Villarreal, 2005) e ainda o fato de que cada membro desse coletivo de alguma maneira condiciona a forma como esse conhecimento é produzido.

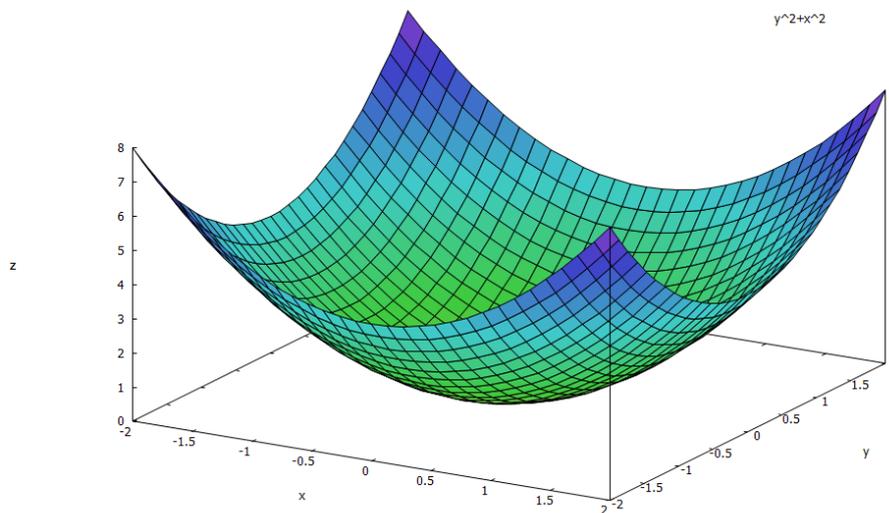
Assim o computador se insere nessa concepção de atividades, em particular o MAXIMA, pelas razões anteriormente mencionadas. Aproveitando os recursos do software procuramos construir um roteiro para as atividades de modo que o estudante tivesse a oportunidade de explorar os conceitos abordados e formular conjecturas. Vale ressaltar que grande parte das atividades buscou a exploração inicial do conceito, antes que este fosse trabalhado de modo teórico. Entendemos que essa exploração inicial pode lançar bases para a formalização posterior. Dessa forma, alguns direcionamentos algumas vezes se fizeram necessários, porém sempre se abria espaço para explorações mais livres em momentos posteriores.

Trazemos para este artigo a primeira atividade, relativa a funções de duas variáveis, trabalhada com os participantes. Estes tinham tido algum contato com o MAXIMA no ano anterior, abordando outros assuntos. A atividade, que foi realizada em dois dias, totalizando quatro aulas no laboratório de informática, teve os seguintes objetivos: explorar gráficos de funções de duas variáveis utilizando as possibilidades de manipulação e visualização oferecidas pelo MAXIMA; identificar as funções definidas por expressões algébricas com seus respectivos gráficos representados por superfícies no R^3 ; compreender, identificar e descrever o domínio de uma função de duas variáveis, relacionando-o com uma região do plano xy que pode ser uma região limitada ou não.

Apresentaremos a seguir alguns registros, comentários e gráficos que foram produzidos pelos alunos durante a atividade. Esta foi elaborada na perspectiva de constituição de ambientes de aprendizagem em que diferentes mídias como a oralidade, a escrita e a informática constituem um coletivo de seres-humanos-com-mídias e que, segundo Borba e Villarreal (2005) pode provocar uma reorganização do pensamento e, de alguma maneira, condicionar a forma como o conhecimento é produzido. Os registros escolhidos para apresentação foram alguns dos que, segundo nossa interpretação, evidenciam alguma produção de conhecimento matemático no ambiente constituído com as mídias utilizadas.

Na primeira parte desta atividade foi solicitado aos alunos que esboçassem o gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ considerando diferentes intervalos de variação da variável x e da variável y , escolhendo a melhor forma de visualização do gráfico. A Figura 3 a seguir apresenta a “melhor visualização” apresentada por um dos grupos de alunos.

Figura 3 - Esboços do gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$



Fonte: Produção dos alunos

De acordo com os registros deste grupo em seu relatório:

“Na nossa opinião esse gráfico é o melhor pois deu pra identificar os eixos e os intervalos claramente”.

Para este mesmo grupo, a utilização do MAXIMA para a construção de um gráfico de uma função de duas variáveis é válida pois:

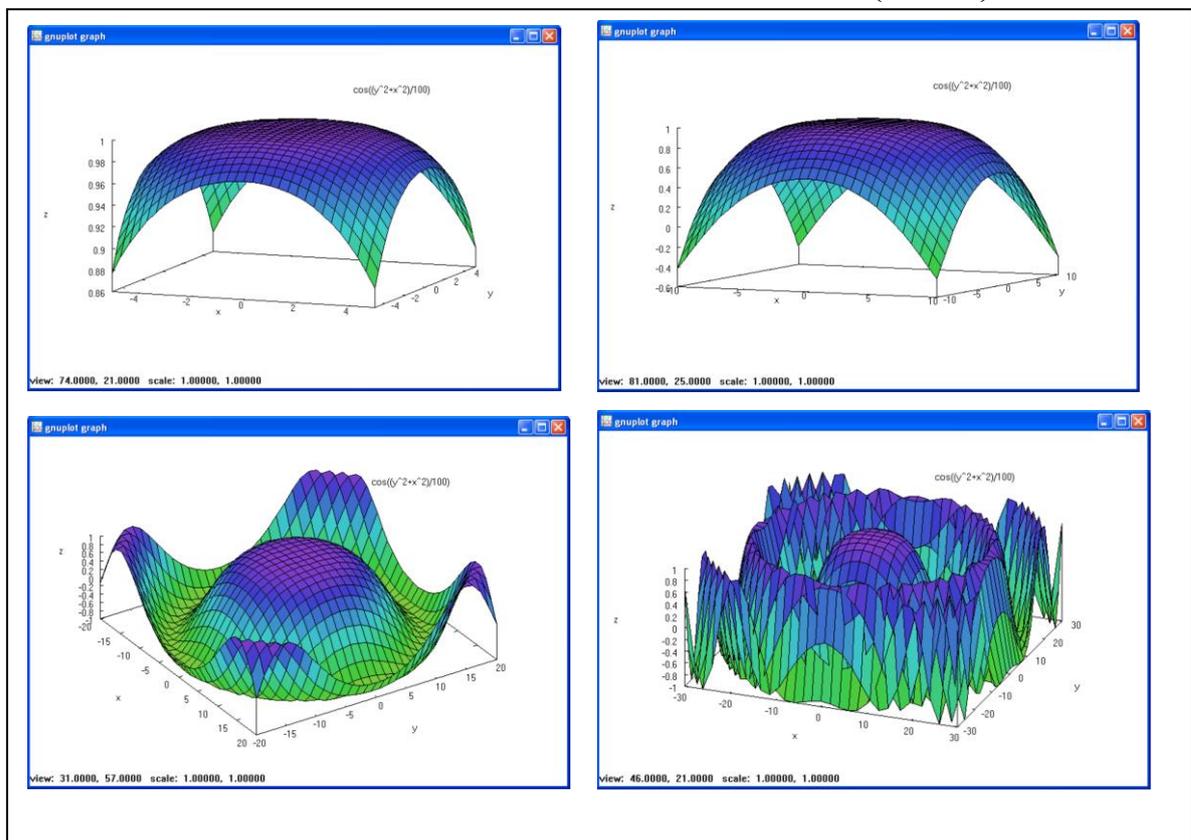
“Observamos que os intervalos são visíveis e o gráfico em 3d fica disposto de uma maneira que não poderia ser feito manuscrito.”

A segunda parte desta atividade foi explorar o gráfico da função $g(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$ em diferentes intervalos centrados na origem. Foram propostas as seguintes questões:

- Considere os gráficos esboçados da função $g(x, y)$ em diferentes intervalos de x e de y . Você observa alguma modificação na aparência da superfície obtida? Existe mais de um gráfico para a mesma função $g(x, y)$? Explique.
- É possível esboçar o gráfico da função $g(x, y)$ para quaisquer valores de x e de y ?

A Figura 4 a seguir apresenta os esboços de um dos grupos.

Figura 4 - Esboços do gráfico da função $g(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$



Fonte: Produção dos alunos

Sobre a aparência da superfície este mesmo grupo responde:

“Observamos que de acordo com o que alteramos o intervalo o gráfico muda completamente a aparência.”

E com relação à pergunta se existe mais de um gráfico para a mesma função, o grupo responde:

“Não. O que ocorre é quando você altera os intervalos a representação gráfica muda de acordo com os intervalos de (x,y) , ou seja o gráfico é o mesmo com formatos diferentes.”

Em seguida a atividade apresenta a definição de domínio de funções de duas variáveis e pede que seja determinado o domínio da função $g(x, y)$ em questão.

A primeira e a segunda parte dessa atividade, embora tenham abordado duas funções com domínio \mathfrak{R}^2 , foram escolhidas de modo a chamar a atenção para o fato de que, para determinadas funções, um único intervalo de variação pode mostrar apenas parte do gráfico, não dando nenhuma ideia sobre a função de modo amplo. Nesse sentido a mídia utilizada foi essencial uma vez que sem os recursos gráficos do software (este ou outro que possibilitasse a visualização de gráficos tridimensionais), nesta etapa inicial dos estudos sobre funções de duas variáveis, seria difícil para os alunos perceberem o comportamento da função em diferentes subconjuntos do domínio. A atividade pode ter construído bases para a percepção dos alunos da necessidade de avaliar mais do que a simples determinação do domínio por meio da análise da expressão algébrica que define a função.

A terceira parte desta atividade teve o objetivo de explorar o gráfico e o domínio da função $h(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, trabalhando aspectos algébricos e gráficos. Para tanto foi sugerida aos alunos a seguinte sequência de ações:

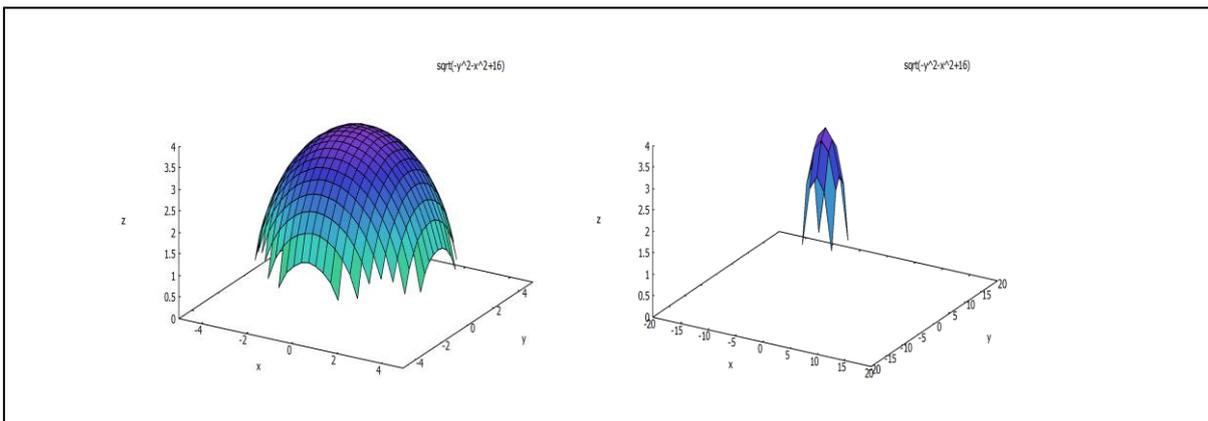
- Esboce gráficos da função usando opções diferentes para as variações de x e de y . O que acontece quando usamos intervalos de variação maiores?
- Encontre os valores de $h(2, 2)$, $h(-1, 2)$, $h(4, 0)$ e $h(3, 3)$. É possível obter os valores da função nos pontos acima indicados? Por quê?
- Movimente o gráfico da função de modo a visualizar a região para a qual não é possível calcular. Para melhor determinação da região, ao esboçar o gráfico aumente os valores da Grade.
- Que região do plano xy corresponde ao domínio da função? Faça um esboço do domínio da função.

Com relação ao esboço do gráfico da função em diferentes intervalos os alunos perceberam que a aparência do gráfico se modificava, porém, a superfície continuava em uma região determinada.

A resposta de um dos grupos evidencia essa percepção, porém, mostra a necessidade de ainda continuar explorando a situação para a identificação da região que efetivamente corresponde ao domínio da função, o que é feito nos demais itens da atividade:

“Quanto maior o intervalo, menor fica a visualização do gráfico, mas o domínio mantém sempre o mesmo: 4 e -4.”

Figura 5 - Esboços do gráfico da função $h(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$



Fonte: Produção dos alunos

Para o cálculo dos valores solicitados, alguns grupos utilizaram a mídia lápis e papel e outros os recursos do próprio MAXIMA, caracterizando assim, uma interação entre diferentes mídias para a construção do conhecimento matemático. Na Figura 6 reproduzimos uma tela do MAXIMA na qual é possível identificar o processo utilizado por um dos grupos.

Figura 6: Cálculos referentes à função $h(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

```

wxMaxima 12.04.0 [ não salvo* ]
Arquivo Editar Cell Maxima Equações Álgebra Cálculo Simplificar Gráfico Numérico Ajuda

(%i1) h(x,y):=sqrt(16-x^2-y^2);
(%o1) h(x,y):=sqrt(16-x^2-y^2)

(%i3) plot3d(h(x,y), [x,-15,15], [y,-15,15], [plot_format,gnuplot]);
(%o3)
(%o4)

(%i5) plot3d(h(x,y), [x,-27,27], [y,-27,27], [plot_format,gnuplot])$

(%i6) h(2,2);
(%o6) 23/2

(%i7) h(-1,2);
(%o7) sqrt(11)

(%i8) h(4,0);
(%o8) 0

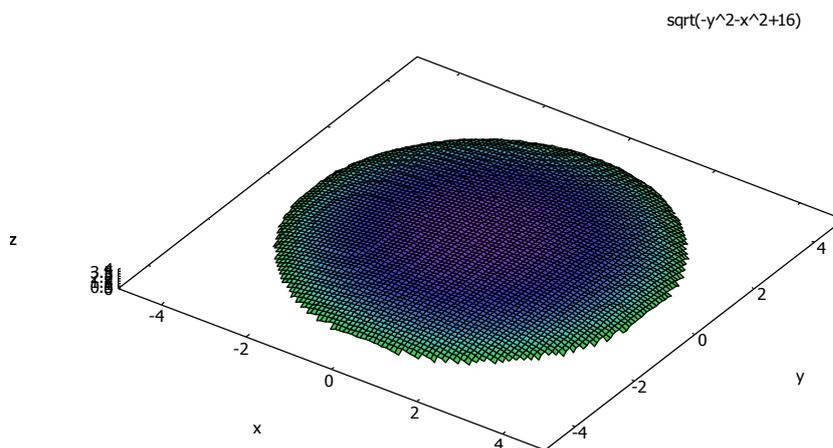
(%i9) h(3,3);
(%o9) sqrt(2) %i
  
```

Fonte: Produção dos alunos

Não temos informações sobre o que levou alguns alunos a escolherem uma ou outra mídia para os cálculos. Provavelmente os que optaram pelo lápis e papel o tenham feito pela simplicidade dos cálculos. Assim como os que optaram pelo software provavelmente o tenham feito para experimentar essa possibilidade no novo ambiente que a eles estava sendo apresentado. Levy (1993) afirma que uma tecnologia não substitui a outra na produção do conhecimento. Dessa forma é legítimo que possa ser feita a escolha por uma ou por outra mídia de acordo com a conveniência para quem as utiliza.

A sugestão de movimentar o gráfico de modo a visualizar a região do plano que corresponde ao domínio da função gerou imagens como a apresentada na Figura 7 por um dos grupos de alunos:

Figura 7 - Visualização do domínio da função $h(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$



Fonte: Produção dos alunos

A quarta parte da atividade teve o objetivo de apresentar funções que pudessem ser exploradas mais livremente pelos estudantes, utilizando os recursos que eles julgassem interessantes. As funções foram escolhidas de modo a contemplar domínios com diferentes características e com possibilidade de boa visualização no software. O roteiro sugerido foi:

- Explore as funções indicadas abaixo. Procure uma boa visualização do gráfico, movimente o gráfico de modo a visualizar também o domínio, determine o domínio.

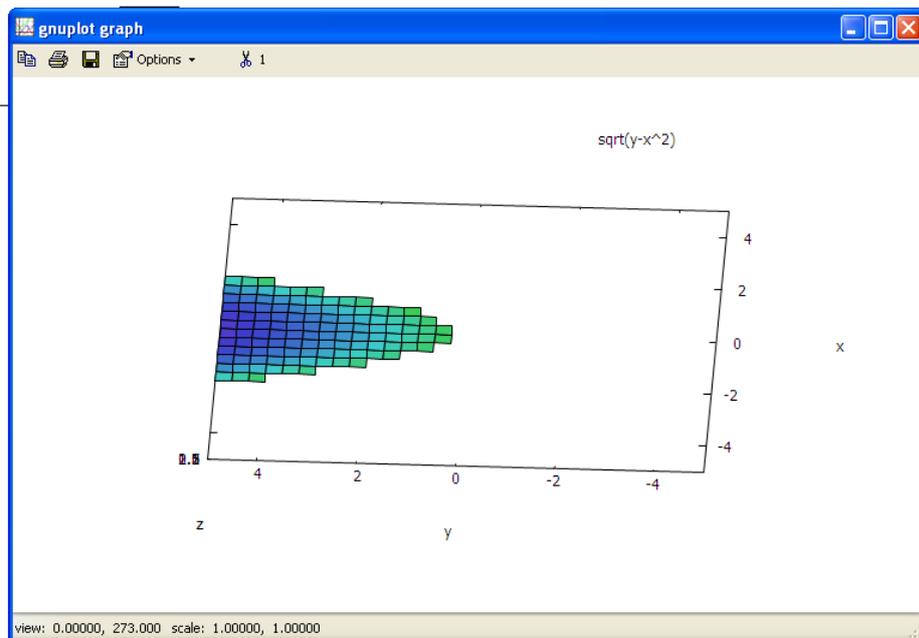
a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

b) $f(x, y) = \frac{1}{y - x}$

- c) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$
- d) $f(x, y) = \log(y + x^2)$
- e) $f(x, y) = x.e^{(-x^2-y^2)}$

A Figura 8 a seguir apresenta imagem obtida por um grupo de alunos para o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ após manipulação buscando uma boa visualização do domínio da função.

Figura 8 - Visualização do domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$



Fonte: Produção dos alunos

Após esse trabalho com as imagens os alunos determinaram as expressões referentes aos domínios das funções indicadas.

De modo geral os estudantes se envolveram com as atividades e mostraram ter compreendido os conceitos explorados. Também avaliaram como positiva a utilização do MAXIMA nas aulas da disciplina. A frase a seguir exemplifica a opinião dos alunos:

“[...] concluímos que a aula foi de total aproveitamento, rendimento e interesse mútuo pelo fato de termos tido o auxílio desse programa para visualizarmos o resultado dos nossos exercícios executados. Sendo assim, tivemos um melhor entendimento da matéria.”

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos e discutimos uma proposta de utilização do software MAXIMA para construção do conhecimento matemático acerca do domínio de funções de duas variáveis, como parte de uma pesquisa em desenvolvimento. A proposta foi planejada para utilização do software em uma perspectiva de criação de ambientes propícios para explorações e investigações, de modo que o conhecimento matemático pudesse ser produzido por coletivos de seres-humanos-com-mídias.

Dessa forma o MAXIMA não foi utilizado para visualizar objetos matemáticos estudados primeiramente de modo teórico anteriormente. Os conceitos teóricos foram explorados pelos participantes por meio das atividades sugeridas e as potencialidades das mídias foram utilizadas para tal exploração.

Outras atividades referentes aos conceitos de curvas de nível, cálculo e interpretação geométrica das derivadas parciais foram também desenvolvidas em continuidade ao trabalho aqui apresentado. Por meio do conjunto das atividades desenvolvidas, assim como pelas abordagens teóricas que se seguiram a elas, procurou-se a compreensão dos conceitos e a transição dos processos relativos ao cálculo de uma variável para o cálculo de duas variáveis. Nesse processo de transição foram importantes não apenas as relações estabelecidas pelos cálculos algébricos equivalentes como também as possibilidades de manipulação das imagens e visualizações propiciadas pelo MAXIMA.

Os dados da pesquisa ainda não foram analisados de modo global. No entanto podemos destacar, naquilo que foi apresentado neste artigo, que a exploração e a manipulação das imagens obtidas possibilitaram, mesmo no início do estudo de funções de duas variáveis, interpretações sobre o comportamento das funções e de seu domínio que dificilmente seriam obtidas sem os recursos do software. Citamos como exemplo as observações dos alunos sobre as diferentes imagens obtidas, por meio do software, para o gráfico da função

$g(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$. Outro exemplo é a possibilidade de visualizar a representação gráfica

do domínio da função primeiramente pela visualização do gráfico tridimensional da função, observando-o de outro ponto de vista. Olhar o gráfico “por cima” é uma forma de planificá-lo

e, dessa forma, visualizar seu domínio, antes mesmo de determiná-lo a partir da expressão da função. Interpretamos que o conhecimento matemático produzido pelos estudantes foi qualitativamente diferente do que poderia ser produzido sem os recursos do software ou mesmo em outra proposta de aula em que os conteúdos fossem apresentados primeiramente de modo teórico e o software fosse usado apenas para visualização posterior. Destacamos assim o coletivo seres-humanos-com-mídias condicionando a produção do conhecimento matemático pelo aluno acerca do domínio e do gráfico de funções de duas variáveis.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. **Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis**. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

KAWASAKI, T. F. **Tecnologias na sala de aula de matemática: resistência e mudanças na formação continuada de professores**. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Tradução de Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. 203 p.

MACHADO, R. M. **A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. Tradução de Jonei Cerqueira Barbosa. **Bolema**, Rio Claro, SP, ano 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: **WERTSCH J. V. (Ed) The concept of activity in soviet psychology**. New York: M. E.Sharpe, 1981. P. 256-278.

VILLARREAL, M.. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.