

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



A MEDIANA DO TRIÂNGULO RETÂNGULO: UMA PROPOSTA DE ENSINO POR ATIVIDADES UTILIZANDO O GEOGEBRA

Stephany Glaucia de Oliveira Paulo¹

Thayann Menezes da Costa Campos²

Carlos Alberto de Miranda Pinheiro³

Educação Matemática Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental

Resumo

Neste trabalho apresentaremos os resultados da aplicação de uma atividade envolvendo a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, com o objetivo de fazer com que o aluno redescubra a propriedade relacionada à mesma. Fundamentamos-nos teoricamente no ensino por atividade, especificamente a do tipo experimental, e o uso do software Geogebra. Com isso, desenvolvemos uma atividade de ensino envolvendo a mediana do triângulo retângulo, para alunos do ensino fundamental. A atividade foi inicialmente aplicada a seis alunos do curso de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, divididos em três duplas, somente depois de nossas análises que passaremos para a fase de aplicação em turmas do ensino fundamental, contudo neste texto apresentaremos apenas os resultados da primeira fase. Dividimos a atividade em três etapas: Na primeira, aplica-se uma questão, na qual solicita a mediana de um triângulo retângulo, a segunda é à atividade no Geogebra e a terceira consiste na aplicação de cinco questões do assunto em questão. O estudo foi realizado no laboratório de informática da universidade e os recursos utilizados foram folhas de papel A4, computadores e canetas. Analisamos os resultados a partir dos registros produzidos pelos alunos. Os resultados obtidos na primeira atividade foi que os discentes acertaram a questão, porém não apresentaram indícios que conheçam o teorema em questão; na segunda fase os alunos alcançaram o objetivo da atividade e na terceira constatamos que um aluno utilizou a propriedade de triângulos equiláteros ocasionando o erro em algumas questões, embora já conhecesse o teorema.

Palavras - Chave: Ensino fundamental. Ensino por atividade. Geometria. Geogebra.

INTRODUÇÃO

O ensino de geometria no plano perdeu a força das demonstrações que é algo substancial para uma melhor compreensão dos teoremas estruturadores da disciplina. Contudo, o desenvolvimento de softwares educacionais vem proporcionando aos professores de Matemática condições à elaboração de atividades de ensino de geometria plana ou espacial utilizando construções geométricas em ambientes computacionais dinâmicos, possibilitado

¹ Graduanda em Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado do Pará. stephanyglauca@hotmail.com

² Graduanda em Licenciatura em Matemática. Universidade do Estado do Pará. thayannmenezes@hotmail.com

³ Mestre em Educação. Universidade do Estado do Pará. Prof.mirandapinheiro@gmail.com

que os alunos tenham oportunidade de realizar conjecturas e chegar às referidas demonstrações sem a rigidez presente na literatura “os elementos” de Euclides, encontrado no trabalho de Dolce e Pompeo (1993, p. 59).

Brasil (1998, p. 51) descreve que o estudo da Geometria no ensino fundamental é um assunto abrangente que pode trabalhar com situações-problema. É importante o trabalho com noções geométricas, pois colabora para a aprendizagem de números e medidas estimulando o aluno a observar, entender semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.

Nesse sentido, nos propomos a desenvolver sequências didáticas, envolvendo elementos da geometria plana para alunos do ensino fundamental com a finalidade de fazer com que os alunos descubram os principais teoremas, por meio de construções geométricas, utilizando software de geometria dinâmica. As referidas sequências são inicialmente aplicadas aos alunos do curso de licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA) e somente depois de nossas análises que passaremos para a fase de aplicação das sequências em turmas de alunos do ensino fundamental.

Neste texto apresentamos alguns resultados da aplicação de uma atividade de ensino para fazer o aluno descobrir o teorema da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo utilizando o Geogebra. A seguir apresentam-se alguns aspectos de opção metodológica de ensino e do Geogebra.

ALGUNS ASPECTOS DA TEORIA

Ensino da matemática por atividades

Atualmente o ensino de matemática está em constante desenvolvimento, por esse motivo o professor de matemática precisa inserir em suas aulas uma metodologia que conduza os alunos a se tornar ativo em sala de aula. Uma alternativa para alcançar esse objetivo é o ensino por atividade. Segundo Mendes e Sá (2006, p.9), o ensino por atividade parte do concreto para o abstrato, o aluno passa de espectador para um criador ativo, assim desenvolvendo a habilidades de interpretar e questionar o próprio conhecimento.

Para Mendes e Sá (2006, p. 16) existem dois tipos de atividade: a do tipo demonstração e a do tipo experimental. Na primeira, o professor assume um papel de orientador, na qual o aluno deve observar e descobrir as noções matemática envolvida na mesma. Na segunda, denominada auto-orientada, o professor faz com que os alunos trabalhem individualmente ou em grupo, mediando à atividade efetuada pelo aluno, deixando o mesmo observar o que está sendo feito e registrar os seus resultados e conclusões de determinado

conhecimento matemático. Para os autores, a aplicação das atividades também pode ser por meios de materiais concretos e tecnológicos, como os softwares educacionais.

Neste texto contém uma atividade do tipo experimental utilizando o Geogebra como principal instrumento à realização da mesma.

Uso do software educacional Geogebra

Primeiramente, deve-se ter uma noção do que vem a ser software livre, segundo Busnello (2008, p.3) “Considera-se ‘livre’ o software ao qual o autor atribui licenças para a sua livre execução, cópia, modificação e distribuição. Neste sentido, o caráter livre refere-se a liberdades de direitos, e não apenas ao custo de aquisição.” Os softwares educativos são poderosos instrumentos que podem ser utilizadas no processo educacional das escolas, auxiliando professores e alunos como complemento no processo de ensino e da aprendizagem.

O Geogebra é um software livre que pode ser utilizado no ensino fundamental, médio ou mesmo superior, que é de grande auxílio para o ensino de geometria, trigonometria e analítica. Seu criador Markus Hohenwarter, iniciou o projeto em 2001 na Universidade de Salzburg e tem continuado o desenvolvimento na Florida Atlantic University.

O programa permite construir várias figuras geométricas e verificar suas características, como por exemplo, construindo um triângulo retângulo e a partir deste analisar suas características, demonstrando a mediana relativa à hipotenusa. Com o aumento do tamanho da figura, a medida da mediana continua sendo a metade da hipotenusa do triângulo retângulo. E no Geogebra podemos manipular essa medida e demonstrar aos alunos o conceito da mediana. A seguir descreve-se o objeto matemático da atividade de ensino.

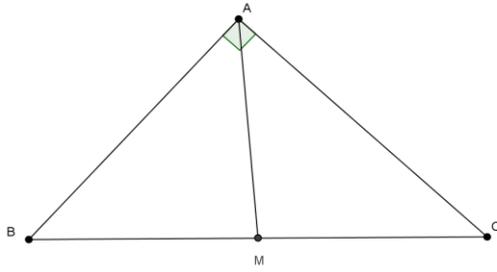
Objeto Geométrico

Entre muitas literaturas existentes de geometria plana encontramos em Dolce e Pompeo (1993, p. 93), uma boa demonstração para problematizarmos nossa intenção de ensino.

A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

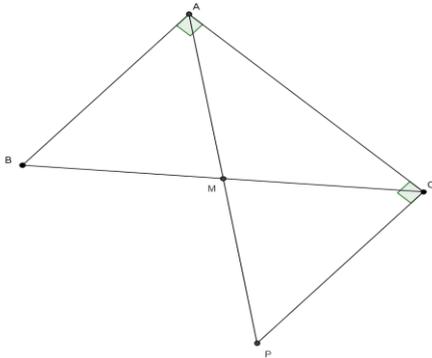
Hipótese: O triângulo é retângulo de hipotenusa \overline{BC} . \overline{AM} é a mediana.

Tese: $\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$.



Demonstração

- Tomemos P sobre a semireta \overrightarrow{AM} com M entre A e P de modo que $\overline{PM} = \overline{AM}$



- Considerando os triângulos AMB e PMC. Pelo caso LAL, eles são congruentes. Daí, tiramos que $\hat{A}BM = \hat{P}CM$. E como estes ângulos são alternos e internos, obtemos que os lados BA e PC são paralelos.
- De BA//PC e $\hat{B}AC$ reto, obtemos que $\hat{P}CA$ é reto (colaterais internos).
- Consideremos agora os triângulos BAC e PCA.
- $BA = PC$ (pois o triângulo $AMB \cong PMC$), $\hat{A} = \hat{C}$ (retos) e $AC = CA$ (lado comum) com isso, pelo caso LAL temos que o triângulo $BAC \cong PCA$.
- Desta congruência concluímos que $AP = BC$ e, como $AP = 2AM$, obtemos: $2AM = BC$, ou melhor, $\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

Deve-se Observar que não é tão simples para um aluno realizar o prolongamento da mediana para a construção do outro triângulo retângulo. Outro ponto em questão é o fato que o aluno precisa ter desenvolvido a habilidade dos casos de congruência de triângulos.

Sendo assim, nossa proposta de ensino conduz o aluno ao processo de construção, utilizando as ferramentas do Geogebra, com o intuito que ele faça conjecturas e chegue à conclusão de que a medida da mediana relativa à hipotenusa é metade da medida da hipotenusa.

MÉTODO

A amostra da pesquisa foram seis alunos do terceiro ano de graduação do curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Pará. A atividade foi realizada no laboratório de informática da universidade.

A aplicação da atividade foi dividida em três etapas, prevista para duas aulas de 50 min. A primeira etapa foi à aplicação de uma questão, na qual solicitava a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, com o objetivo de observar os conhecimentos prévios do aluno sobre o conteúdo. A segunda etapa foi à atividade no Geogebra, na qual os alunos foram divididos em duplas, dupla A, B e C, com o objetivo de fazer com que os alunos redescubram a propriedade relacionada à mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo. E a terceira etapa, foi a aplicação de 5 questões relacionadas a mediana relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo, com o objetivo de analisar seus conhecimentos em relação a primeira atividade.

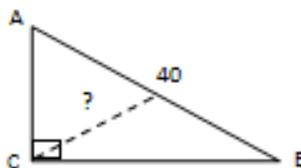
Os recursos utilizados para a realização da atividade foi papel A4 obtendo a mesma, computadores contendo o software Geogebra e caneta.

Como dito acima, na primeira etapa solicitou-se aos alunos a solução de uma questão envolvendo o cálculo da mediana.

ATIVIDADE 1

NOME: _____

1. Com base na figura a seguir calcule a mediana relativa ao lado AB.



Na segunda etapa, após a divisão dos alunos em duplas, eles foram destinados à atividade de construção do triângulo retângulo e a mediana relativa à hipotenusa no Geogebra. De modo que foi entregue a cada dupla um material que conduziram os mesmos a realização da atividade, com questionamentos no final, em que eles registraram suas conclusões e computadores contendo o software.

ATIVIDADE 2

ALUNO (a): _____

DUPLA: _____

DATA ___/___/2013

Preliminares

- Esconder a janela de Álgebra e os Eixos
- Click em opções e depois em arredondamento zero (0)
- Click em opções e depois em rotular todos os objetos novos

Atividade

1. Com o botão  construa o segmento AB.
2. Com o botão  construa uma reta perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto A.
3. Click com o mouse direito, sobre o ponto A, vá a propriedades e assinale “fixar objeto”.
4. Com o botão  faça surgir o ponto C sobre a reta (b) perpendicular ao segmento AB.
5. Novamente com o botão  construa o segmento AC, que será nomeado de c, e o segmento CB, que será nomeado de d.
6. Click com o mouse direito sobre a reta perpendicular (b) e aperte  para esconder à reta.
7. Com o botão  faça surgir o ângulo interno do vértice A, no sentido vértice BAC.
8. Utilize o botão  para poder mexer os pontos B e C. Verifique se o ângulo do vértice A mantém seu valor.
9. Com o botão  faça surgir o ponto médio (D) do segmento BC.
10. Com o botão  construa o segmento AD, nomeado de e. Este segmento é a mediana do triângulo BAC relativa ao lado BC. Construa, também, os segmento CD – nomeado de f – e segmento DB, nomeado de g.

11. Usando a janela de texto  escreva: segmento CD =. Na mesma janela de texto, depois da igualdade clique no segmento nomeado de f. Dessa forma, surgirá a media do segmento CD.

12. Repita o mesmo procedimento para o segmento DB.

13. Usando a janela de texto  escreva: comprimento da mediana =. Na mesma janela de texto, depois da igualdade clique no segmento nomeado de e. Dessa forma, surgirá a medida do segmento AD.

14. Esconda: a, e, f, g, d, c.

15. Utilize o botão  para poder mexer os pontos B e C. Verifique o que ocorre como os textos que foram inseridos.

Mantenha a janela do GEOGEBRA aberta e não apague o que já foi construído.

16. Com o botão  construa um novo triângulo Retângulo EFG. Com o mouse direito apague o rótulo do triângulo  Exibir Rótulo . Acione propriedades e solicite cor escura e estilo sem preenchimento.

17. Click com o mouse direito, sobre o ponto F, vá a propriedades e assinale “fixar objeto”.

18. Esconda e_1 , g_1 e f_1 .

19. Com o botão  faça surgir o ângulo interno do vértice F, no sentido GFE.

20. Utilize o botão  para poder mexer os pontos E e G. Verifique se o ângulo do vértice F apresenta valores diferentes.

21. Com o botão  faça surgir o ponto médio (H) do segmento EG.

22. Com o botão  construa o segmento FH, nomeado de h. Este segmento é a mediana do triângulo EFG, relativa ao lado EG. Construa, também, os segmento EH– nomeado de i – e segmento HG, nomeado de j.

23. Usando a janela de texto  escreva: segmento EH =. Na mesma janela de texto, depois da igualdade clique no segmento nomeado de i. Dessa forma, surgirá a media do segmento FH.

24. Repita o mesmo procedimento para o segmento HG.

25. Usando a janela de texto  escreva: comprimento da mediana =. Na mesma janela de texto, depois da igualdade clique no segmento nomeado de h. Dessa forma, surgirá a medida do segmento EH.

26. Esconda: i, h, j.

27. Utilize o botão  para poder mexer os pontos E e G. Verifique o que ocorre como os textos que foram inseridos.

Responda

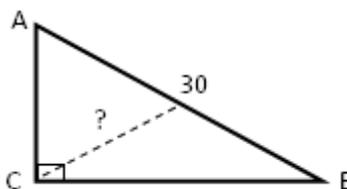
- Qual é a relação do comprimento da mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo e a medida da hipotenusa?
- Como foi a aula?
- Quais foram suas principais dificuldades durante a realização da atividade?

Na terceira etapa, foi a aplicação de 5 questões relacionadas a mediana relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo.

ATIVIDADE 3

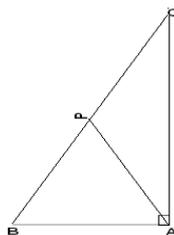
NOME: _____

1. Com base na figura ao lado, calcule a medida da mediana relativa ao lado AB.



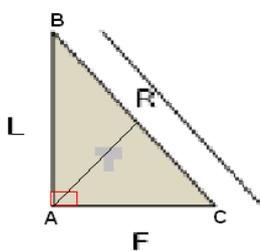
2. Considere um triângulo retângulo de vértices ACB, com ângulo reto no vértice C e hipotenusa medindo 14 cm. Calcule a mediana relativa ao lado AB.

3. Observe a figura a seguir e responda:



Qual é a medida da hipotenusa, sabendo que AP mede 10 cm?

4. Considere um triângulo retângulo de vértices ACB, com ângulo reto no vértice C e mediana relativa ao lado AB medindo 7 cm. Calcule a medida da hipotenusa.
5. Alfredo tem um terreno triangular com as seguintes características: sua frente (F) e sua lateral esquerda (L) formam entre si um ângulo reto; um trecho de igarapé (R) passa exatamente pelos extremos do terreno BC. Considerando que Alfredo deseja construir um canal, com água retirada do igarapé, partindo de um ponto médio de BC até o vértice A do terreno e que a medida da frente é 30 m e da lateral 40 m, então calcule o comprimento, em metros, que deverá possuir o referido canal.



RESULTADOS

No primeiro momento foi solicitado aos alunos que resolvessem uma questão da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. O resultado dessa primeira atividade encontrasse na tabela a seguir:

Tabela 1: Análise quantitativa da primeira atividade

Acerto	Erro
6	0

Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

A segunda atividade consiste na construção do triângulo retângulo e a mediana relativa à hipotenusa. Na qual nos questionamentos submetidos a eles, as três duplas chegaram à conclusão de que a mediana é a metade da medida da hipotenusa.

Na terceira atividade, analisamos os erros e os acertos relacionados às cinco questões sobre a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Os resultados desta encontrassem na tabela 2.

Tabela 2: Análise quantitativa da terceira atividade

Questões	Acerto	Erro
1°	6	0
2°	6	0
3°	5	1
4°	6	0
5°	3	3

Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

DISCUSSÕES

Na primeira atividade, Nenhum dos investigados apresentou ter conhecimento da propriedade da mediana relativa mesmo já tendo cursado a disciplina de geometria euclidiana, contudo eles utilizaram seus conhecimentos pré-existentes para justificar sua resposta.

O Aluno A utilizou a propriedade do triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência para justificar sua resposta. Como mostra a figura 1:

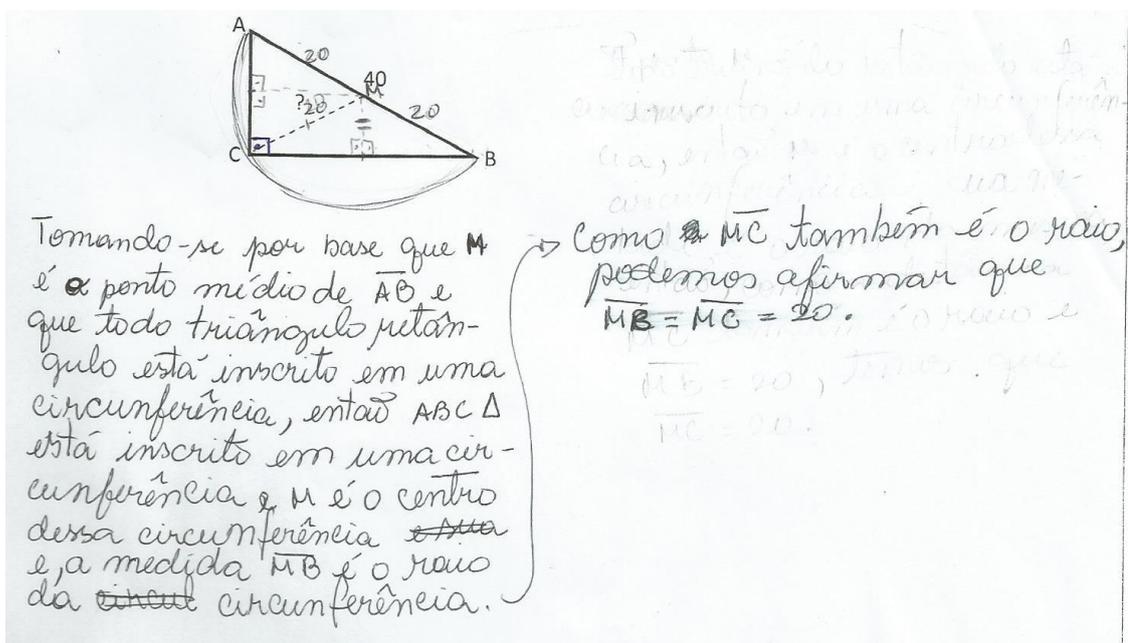


Figura 01: Resposta da primeira atividade do aluno A
Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

Os Alunos B, C e F utilizaram a transposição de figuras para justificar suas respostas. Como podemos observar nas figuras 2, 3 e 4:

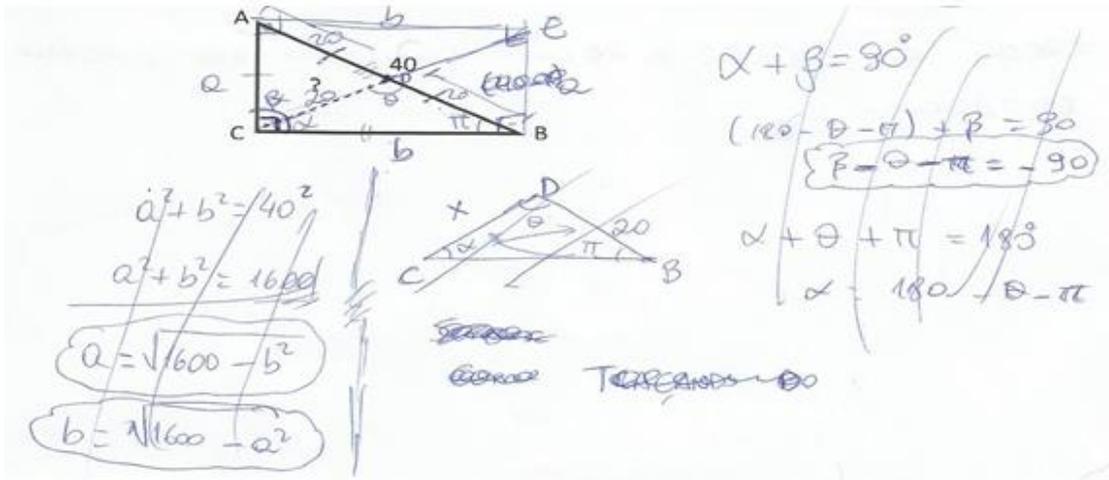


Figura 02: Resposta da primeira atividade do aluno B
 Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

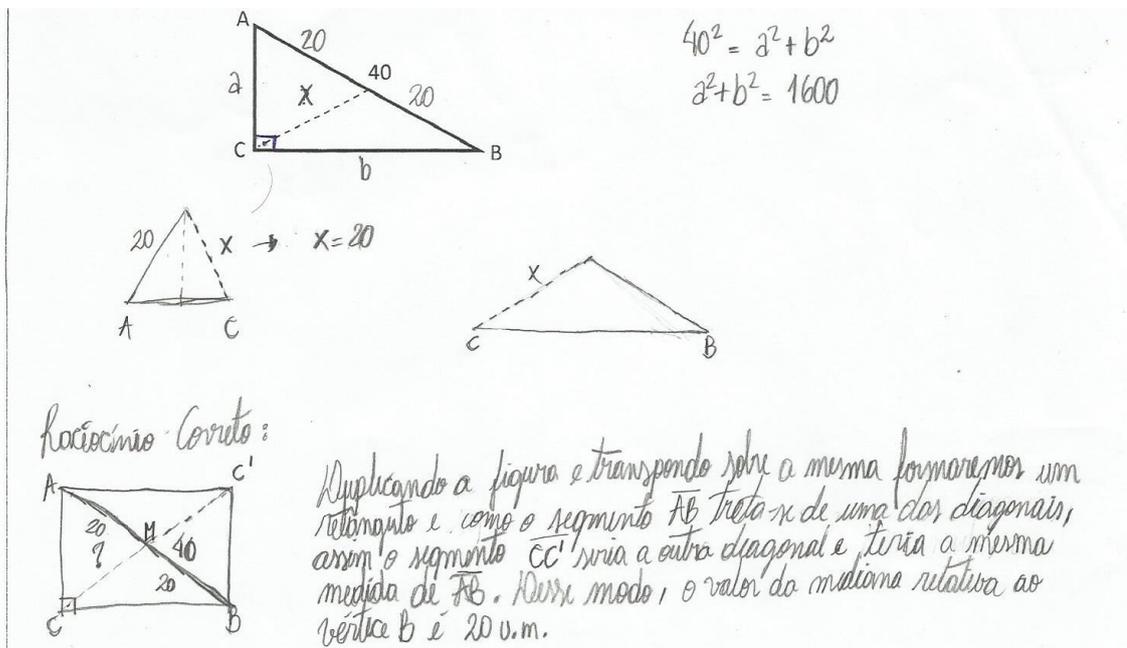
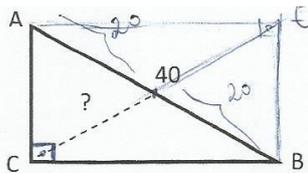


Figura 03: Resposta da primeira atividade do aluno C
 Fonte: Pesquisa de campo, 2013.



Completando o retângulo e ~~fazendo~~ levando em consideração que o lado \overline{AB} é também a diagonal do retângulo e que a mediana é a outra diagonal do retângulo, podemos concluir que a mediana da figura mede 20.

Figura 04: Resposta da primeira atividade do aluno F
Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

Como podemos perceber o Aluno B e o Aluno C, tentaram outros caminhos até chegarem à conclusão da formação do retângulo. O fato de completarem o retângulo para achar o valor da mediana foi esperado, pois o triângulo retângulo escolhido estava favorável à visualização.

Os alunos D e E utilizaram a propriedade do triângulo equilátero (a medida de todos os lados são congruente) para justificar suas respostas. Como mostra as figuras 5 e 6:

justificativa: Dividindo o triângulo retângulo em dois outros triângulos, temos que o ΔACD é um triângulo equilátero, ou seja, possui seus lados iguais. Como o triângulo retângulo de lado AB é 40, então no ΔACD , o lado AD é 20, o que resulta em outros lados serem 20 também.

Figura 05: Resposta da primeira atividade do aluno D
Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

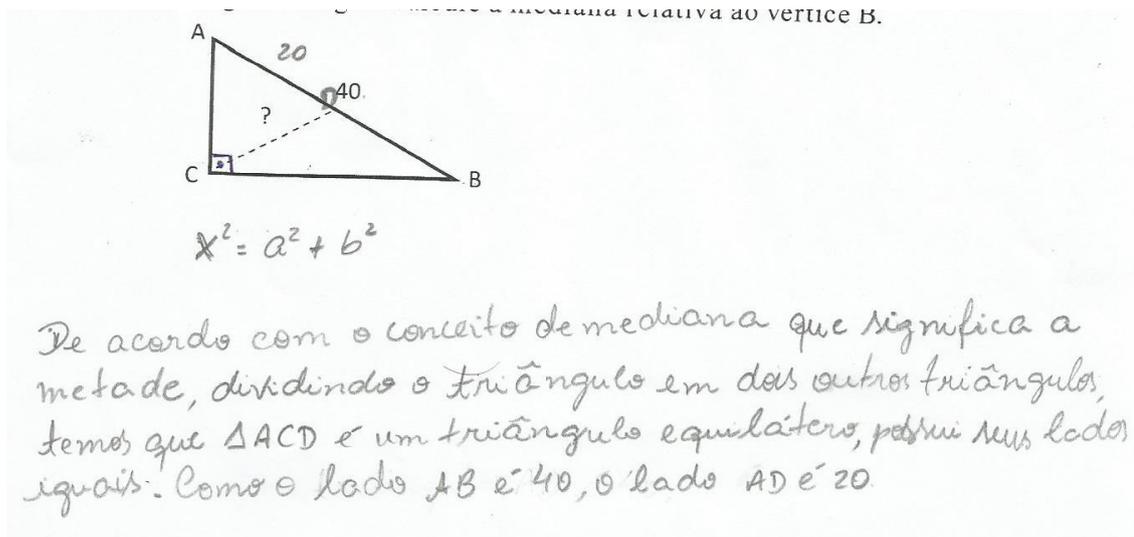


Figura 06: Resposta da primeira atividade do aluno E
 Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

O Aluno D e o aluno E se equivocaram em utilizar a propriedade do triângulo equilátero, pois nada indica que o ângulo reto está sendo dividido em dois ângulos iguais e que o ângulo formado pela mediana sobre o lado AB é de 45° .

Na segunda atividade, foi de grande importância para os alunos perceberem o conceito da mediana relativa à hipotenusa do triângulo retângulo, a partir da construção do mesmo no software Geogebra através de atividades.

Sendo que as duplas A e B registraram que sentiram dificuldade no manuseio na utilização do software, mas os mesmos já tiveram uma disciplina na qual orientava no manuseio do Geogebra, talvez eles não pratiquem com frequência as ferramentas do software. A dupla C registrou que não sentiu dificuldade na utilização do Geogebra, pois já conhecia.

As três duplas acharam a aula construtiva, com as considerações de algumas, como, a dupla A que registrou “A aula foi dinâmica e com a utilização do software fica mais fácil visualizar o comportamento das medidas, dos segmentos e dos ângulos”. E a dupla C que registrou “A aula foi boa, pois pudemos visualizar melhor a relação entre a mediana e a hipotenusa de um triângulo retângulo”.

Com relação à terceira atividade, observando em resultados o quadro 2, todos os alunos acertaram a 1ª, 2ª e 4ª questão, o aluno D errou a 3ª questão e os alunos D, E e F erraram a 5ª questão. Na figura 7 apresenta a resolução do aluno D com relação à terceira questão.

3. Observe a figura a seguir e responda:

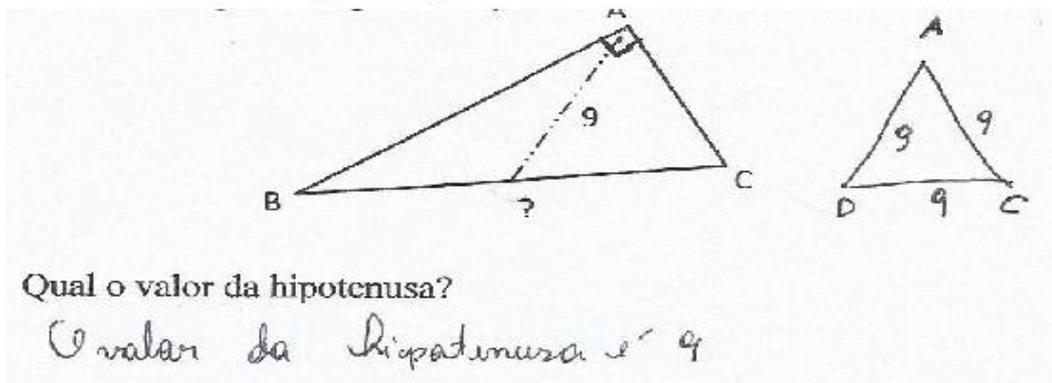


Figura 07: Resposta do aluno D na terceira questão da atividade 3
 Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

Observa-se que mesmo depois de apresentar indícios que conhecia o teorema da mediana em relação à hipotenusa, o aluno D ainda tenta resolver a questão através da propriedade do triângulo equilátero, provocando assim seu erro.

A quinta questão da atividade obteve três erros, que foram do aluno D, E e F. Como mostra a figura 8, 9 e 10, respectivamente.

5. Alfredo tem um terreno triangular com as seguintes características: sua frente (F) e sua lateral esquerda (L) formam entre si um ângulo reto; um trecho de igarapé (R) passa exatamente pelos extremos do terreno BC. Considerando que Alfredo deseje construir um canal, com água retirada do igarapé, partindo de um ponto médio de BC até o vértice A do terreno e que a medida da frente é 30 m e da lateral 40 m, então calcule o comprimento, em metros, que deverá possuir o referido canal.

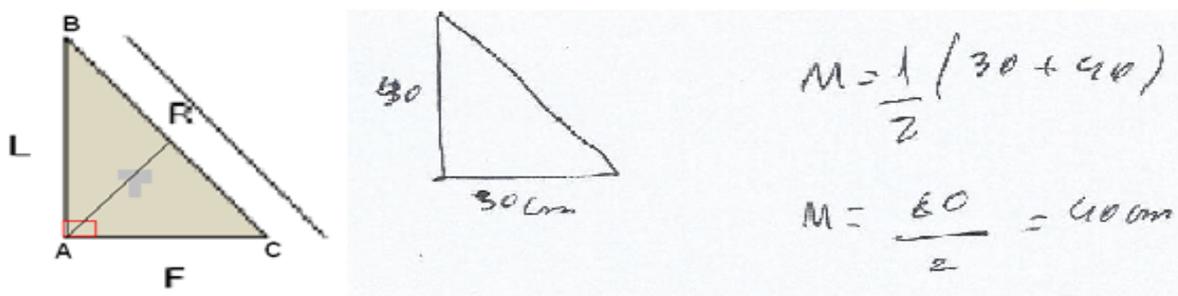


Figura 08: Resposta do aluno D na quinta questão da atividade 3
 Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

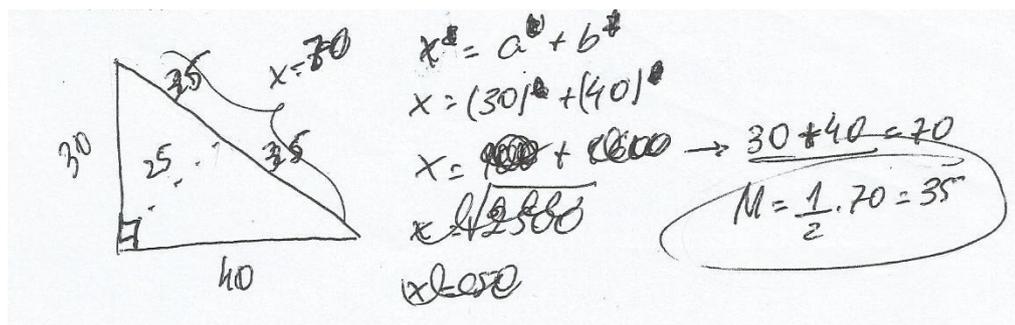


Figura 09: Resposta do aluno E na quinta questão da atividade 3
 Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

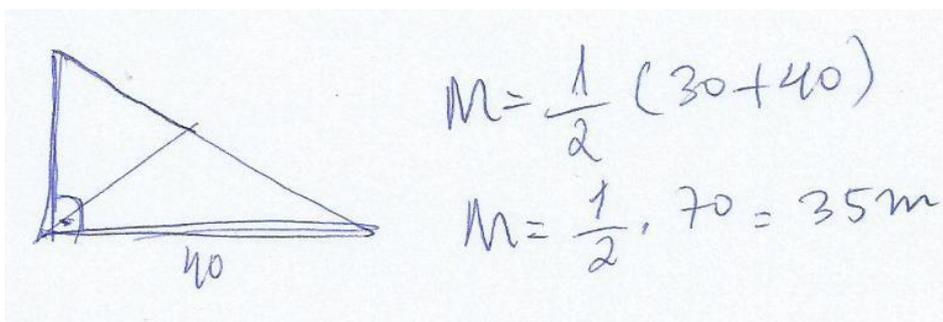


Figura 10: Resposta do aluno F na quinta questão da atividade 3
 Fonte: Pesquisa de campo, 2013.

Os Alunos D e F apenas somaram os valores dos catetos e dividiram por dois, chegando assim ao resultado errado. Sendo que ainda ocorreu um erro de soma do aluno D.

O Aluno E apresentou dúvida ao iniciar a resolução de uma forma e depois comete o mesmo erro dos alunos D e F.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho é uma proposta de ensino por atividade com a utilização do software Geogebra, com estudos da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, para alunos das series finais do ensino fundamental, mas primeiramente aplicado para seis alunos do terceiro ano de graduação do curso de licenciatura em matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA).

As atividades serviram aos alunos, que redescobrissem a propriedade da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Apesar de que na terceira atividade ocorreram alguns erros dos alunos D, E e F.

A importância desse estudo para nossa formação foi de grande valia, pois contribuiu para o nosso desenvolvimento profissional, da criticidade, da criatividade e da capacidade de argumentar.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ secretaria de educação fundamental**. Brasília: MEC/ SEF, 1998. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 jun. 2013.

BUSNELLO, F. O. D. **Software livre e os direitos do autor**. 2008. 30 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Bacharelado em direito, Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2003. Disponível em: http://www3.pucrs.br/pucrs/files/uni/poa/direito/graduacao/tcc/tcc2/trabalhos2008_2/felipe_octaviano.pdf. Acesso em: 10 mar. 2013.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: Geometria plana**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. 9 v.

MENDES, I. A.; SÁ, P. F. de. **Matemática por atividades: Sugestões para a sala de aula**. Natal: Flecha do tempo, 2006. p. 9-17.