

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Minicurso



PARA ALÉM DO CÁLCULO DA MÉDIA ARITMÉTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Paulo Jorge Magalhães Teixeira¹

Resumo:

Este Minicurso tem como objetivos os de caracterizar Estatística, Estatística Descritiva, variáveis, abordar aspectos relacionados ao ensino nos currículos da Educação Básica e tratar de questões acerca do conceito de média aritmética em um conjunto de dados por meio de atividades que visam ampliar o tratamento que habitualmente é apresentado nos livros didáticos. Embora o algoritmo de cálculo da média aritmética seja bastante simples e conhecido por grande quantidade de indivíduos, muito dos que a calculam o fazem sem saber utilizar o seu valor para uma análise em relação aos dados que permitiram seu cálculo. Surgem, então, algumas questões que serão levantadas para reflexões com o grupo: Para que serve o valor da média aritmética? Esse valor coincide com algum valor da amostra? Em que situações esses valores são iguais? Onde e como usar o seu valor? Em que situações seu valor é necessário para analisar os dados de uma amostra?

Palavras Chaves: Educação Matemática. Educação Estatística. Formação de Professores de Matemática. Conhecimento Matemático para o Ensino. Currículos de Matemática.

1. INTRODUÇÃO

Quando pensamos na palavra estatística logo nos vêm à mente a compreensão de gráficos, tabelas e quantidades numéricas calculadas a partir de um conjunto de dados.

Dados estatísticos são utilizados para justificar a tomada de decisões tanto no âmbito público quanto no privado; coletivos ou individuais: onde morar, que carro comprar, no investimento de valores ou de políticas públicas, informações do mundo adulto.

De fato, o uso dessas representações integra nosso cotidiano e é cada vez mais frequente na mídia televisiva e escrita.

Em geral a palavra *Estatística* permeia a rotina do cidadão comum que acompanha o custo de vida, a inflação mensal, a popularidade dos políticos, as tendências do mercado em relação a produtos e marcas etc.

Definimos *Estatística* como uma ciência que tem como objetivo desenvolver métodos para coletar, organizar e analisar dados.

¹ Doutor em Educação Matemática. IME-UFF. pjuff@yahoo.com.br

Uma de suas finalidades é a de auxiliar outras ciências na tomada de decisões em condições de incerteza, extraindo informações dos dados de forma a obter uma melhor compreensão das situações que esses dados representam.

Contudo, o significado dessa palavra ganha outra dimensão quando se refere ao conjunto de procedimentos que auxilia a pesquisa científica e também as diversas áreas do conhecimento que lidam com a coleta e o tratamento de dados.

É sempre recomendável a utilização de métodos estatísticos para a coleta de dados de modo a fazer análises e extrair o máximo de informações e, de modo a obter uma melhor compreensão das situações que esses dados representam.

Uma parte da estatística, chamada de Estatística Descritiva, que trata de explorar os dados, procura resumir-los e entender o que eles estão representando e quais modelos sugerem; uma segunda parte denominada Estatística Inferencial (Inferência Estatística) constrói modelos e procura testá-los para explicar melhor a situação e fazer previsões.

Distinguem-se, essencialmente, duas fases em uma análise estatística, a saber:

1ª Fase: Aquela em que se procura descrever e estudar a amostra, colocando em evidência as principais características e suas propriedades envolvidas, é dita a fase da Estatística Descritiva;

2ª Fase: Aquela onde são conhecidas certas propriedades (obtidas a partir de uma análise descritiva da amostra) expressas pela inferência em certas proposições mais gerais, que exprimem a existência de certos conceitos na população, ou seja, em que se procura tirar conclusões para a população, é dita a fase da Estatística Indutiva.

Ao contrário das proposições que foram deduzidas de propriedades verdadeiras a priori nada se podem afirmar sobre o valor lógico (verdadeiro ou falso) dessas proposições uma vez que foram satisfeitas para um conjunto restrito de indivíduos e, portanto, não são falsas nem verdadeiras para todos os indivíduos da população.

Existe, assim, certo grau de incerteza (porcentagem de erro) que é medido em termos da probabilidade da amostra utilizada em função da população a ser alcançada.

2. A ESTATÍSTICA DESCRITIVA

A Estatística Descritiva fornece um conjunto de técnicas analíticas que nos permite, de forma sistemática, organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de observações ou experimentos realizados em qualquer área do conhecimento.

Nesta parte da estatística as técnicas reduzem os dados a poucos números, tabelas e gráficos e ajudam-nos a compreender a natureza dos fenômenos em estudo.

O foco é a descrição dos dados para fins comparativos, mas que não tem a pretensão de estender as conclusões para além desses dados.

Ao final da década de 70, Tukey apresenta o diagrama de ramo e folha e o diagrama de caixa (Boxplot), permitindo o surgimento de um novo conjunto de métodos descritivos denominado de Análise Exploratória de Dados – AED, ampliando o caráter descritivo para uma postura também investigativa.

3. VARIÁVEIS E SUA CLASSIFICAÇÃO

Variável em Matemática representa todos os elementos de um conjunto, sem coincidir com nenhum deles individualmente, “símbolo que representa indistintamente os elementos de um conjunto” (USISKIN, 1995).

Já a *variável estatística*, ou simplesmente *variável*, é uma característica da população (ou amostra) em estudo, possível de ser medida, contada ou categorizada.

O termo *variável* é um dos mais empregados na linguagem utilizada pelos pesquisadores. Seu objetivo é o de conferir maior precisão aos enunciados científicos, sejam hipóteses, teorias, leis, princípios ou generalizações (Gil, 2002, p. 32).

A Estatística trabalha com conjuntos de variáveis que se dividem em 2(dois) grandes grupos: *Variáveis Qualitativas ou variáveis categóricas* (classificam as unidades em categorias (que podem ou não ter uma ordem natural), isto é, categorizada) e as *Variáveis Quantitativas* (números, isto é, numérica). Além delas há as variáveis empíricas (observáveis) ou conceituais (não observáveis).

As variáveis qualitativas apresentam como valores um atributo ou qualidade acerca dos indivíduos pesquisados. Podem ser de dois tipos:

Variáveis Ordinais, quando é possível estabelecer uma ordem entre os seus valores, nas categorias, por exemplo: número de telefone, desempenho dos alunos numa determinada prova: muito bom, bom, regular, fraco, péssimo, etc., o grau de instrução: analfabeto, ensino fundamental, ensino médio, superior completo, especialização, mestrado, doutorado, etc., classe social (baixa, média e alta), gosto pelo Português (não gosto, gosto pouco, gosto mais ou menos e gosto muito), ou, então,

Variáveis Nominais, quando não é possível estabelecer uma ordem entre os seus valores (não existe ordem nas categorias), por exemplo: disciplina preferida, tipos de medo, cor do cabelo, sexo, esporte praticado como hobby: natação, basquete, voleibol, futebol, dança, judô, etc, o gênero de música de que gosta: erudita, popular brasileira, rock, sertaneja, gospel, clássica, o clube de coração: Vasco, Flamengo, Fluminense, Botafogo, Bangu, etc.

As *variáveis quantitativas* de observações são numéricas. Esses números podem ser de dois tipos: números naturais e números reais. Assim, as operações aritméticas de tais valores têm sentido nessas variáveis uma vez que tratam de números reais.

Essas variáveis, por sua vez, se classificam em *variáveis discretas* ou *variáveis contínuas*.

Em *variáveis contínuas* quando não se tem um ou mais valores, mas sim, quando pode tomar qualquer valor em um intervalo de valores entre dois limites quaisquer na reta real (resultantes de mensuração), tais como, por exemplo: um diâmetro que varie de 0 a 1 metro; altura dos alunos (cm); longitude (graus); peso (kg); renda familiar (R\$); gastos (R\$); vendas (R\$) ou faturamento (R\$) ou a quantidade de vinho em uma caneca de 50 ml.

São *variáveis discretas* aquelas que podem tomar um ou mais números finitos de possíveis valores (resultado de contagem), ou seja, quando conta quantos casos são possíveis. Por exemplo: o número de respostas corretas em cinco perguntas pode ser: 0, 1,2,3,4,ou 5; idade; número de filhos; número de irmãos; número de sementes que germinam.

Quando se fala em *variável discreta* aborda-se um único valor tal como, por exemplo, a quantidade de peças defeituosas em uma amostra.

A tipologia dos dados já determina se a variável será, portanto, contínua ou discreta. Isso implica que definir uma variável como contínua ou discreta já acarretará, mais adiante, que tipo de tratamento se dará a esta variável.

4. AS MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Tendo um conjunto de dados podemos utilizar diversas medidas estatísticas como, por exemplo, aquelas que se prestam à análise de localização do centro desses dados, as denominadas medidas de tendência central.

São chamadas assim, ditas medidas de locação, pois expressam por meio de um único número em torno de que valor tende a concentrar-se um conjunto de dados numéricos.

As medidas de tendência centrais são valores que resumem um conjunto de dados a um único valor que, de alguma forma, seja representativo do conjunto. As mais importantes medidas de tendência central são: a média aritmética, a mediana e moda.

Também é usada a média aritmética para dados agrupados, a média aritmética ponderada, a média geométrica, a média harmônica.

Se os dados provêm de uma amostra, a média, a mediana e as demais medidas de tendência central são dados estatísticos e, se os dados provêm de uma população, eles são ditos parâmetros.

Não se recomenda que essas medidas sejam apresentadas aos alunos de maneira mecânica, segundo a qual os conceitos são apresentados muitas vezes desprovidos de significados por meio da ênfase que é dada ao aspecto algorítmico de uso de fórmulas e de cálculos, sem interpretação acerca dos resultados obtidos.

Não confundir a interpretação resultante dos valores obtidos com as medidas de tendência central com fazer inferências (usadas na perspectiva de ampliar para uma população o resultado encontrado na amostra, considerando que essa ampliação é mediada pela probabilidade).

Por outro lado, é preciso preparar o aluno para o raciocínio inferencial, não prescindindo da introdução de medidas de variabilidade como, por exemplo: a **amplitude**, desde as primeiras abordagens de tratamento de dados na Educação Básica e a variância e o desvio padrão.

Na fase introdutória do ensino de estatística no Ensino Fundamental, talvez fosse oportuno falar um pouco de **amplitude**, que permite ampliar um pouco mais a imagem conceitual a respeito do conjunto de dados que está sendo considerado.

Exemplo: Considere que o aluno Carlos obteve as seguintes notas em Português, nos quatro bimestres letivos de 2011: 4,0; 5,8; 7,6 e 6,2. A nota média de Carlos foi então:

Média final do ano $\bar{x} = 5,9$ pontos/bimestre. (\bar{x} lê-se “X barra”). Significa que o rendimento médio de Carlos, ao longo do ano, foi de 5,9 pontos por bimestre.

Assim, essa nota sintetiza e representa o desempenho médio de Carlos nos quatro bimestres.

Média aritmética: Costumamos nos referir à média como o ponto de equilíbrio entre as quatro notas; notas abaixo da média são compensadas por notas acima da média. Assim: \bar{x} é dita a nota média, ou a média aritmética (ou, simplesmente, média) das quatro notas bimestrais.

A média aritmética é um valor que representa, de forma resumida, os valores da variável x , levando em consideração os elementos da amostra. É definida como a soma de todos os valores da variável (x_j) dividida pelo tamanho da amostra.

Se x_1, x_2, \dots, x_n denota uma amostra de n observações, então a média da amostra

denota-se por \bar{x} (“x-barra”) e é calculado como:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_j}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} .$$

Se todos os dados da população são considerados, então a notação é trocada pela letra grega μ .

Apesar da simplicidade de seu algoritmo para o seu cálculo, a média é um conceito estatístico complexo e apresenta muitas dificuldades para a compreensão dos fundamentos que levam à construção do conceito. Por conta disso, uma análise conceitual detalhada é considerada necessária e imprescindível de ser feita, diferentemente da visão matemática do seu cálculo segundo os aspectos puramente algorítmico e formal.

Os livros didáticos não têm contemplado um estudo conceitual da média aritmética, recorrentes que são em práticas que dizem respeito à aplicação do algoritmo, por vezes desprovida de análises a respeito do resultado obtido.

Segundo Watson (1996), crianças pequenas interpretam a frase “os casais jovens têm em média 2,3 filhos”, como: “eles têm dois filhos e a esposa está grávida do terceiro”; ou “eles têm dois filhos adultos e um menor, mas, quando o menor completar 16 anos, ele vai virar o terceiro” (CAZORLA, 2003).

Embora o algoritmo de cálculo da média aritmética seja bastante simples e conhecido por uma enorme quantidade de indivíduos - até para quem não é um amante da matemática - muito dos que calculam a média aritmética (por diferentes razões) o fazem sem saber se utilizar do seu valor para uma análise cuidadosa em relação aos dados que permitiram seu cálculo.

Neste Minicurso vamos apresentar alguns exemplos em que o valor da média aritmética não é suficiente para tirar conclusões a respeito dos dados coletados e discutir quais estratégias podem ser usadas.

A média aritmética é representativa?

- O valor médio nem sempre é representativo: As notas em Português de Raul são: 7, 98, 25, 19 e 26. Calcule o valor médio das notas de Raul. O que representa o valor médio das notas de Raul?

- Combinando valores médios: O valor médio das notas em Português de 3 (três) estudantes é 54, e o valor médio de outros 4 (quatro) estudantes (nenhum deles é do grupo dos estudantes anteriores) é 76. Qual o valor médio das 7 notas? E se o valor médio das notas de 3 estudantes é 76 e de outros 4 estudantes é 54, qual o valor médio das 7 notas?

Surgem algumas questões que serão levantadas para reflexões e discussões com o grupo, quais sejam:

Para que serve o cálculo da média aritmética?

Em que situações esses valores são iguais?

A média aritmética (valor médio) está sempre no centro (meio) da amostra?

A média pode ser maior que o maior dos valores ou menor que o menor valor da amostra?

A média aritmética pode ser igual ao menor valor da amostra?

A média aritmética pode ser igual ao maior valor da amostra?

A média aritmética pode ser igual à média entre o menor e o maior valor da amostra (se eles são distintos)?

A média aritmética (valor médio) pode ser igual ao segundo valor quando se consideram os valores em ordem crescente (onde nem todos os valores são iguais)?

A média pode não ser igual a nenhum valor da amostra?

Em que situações esses valores são iguais?

Onde e como usar o seu valor?

Em que situações o seu valor é necessário para analisar os dados de uma amostra?

Estas e outras perguntas serão respondidas ao longo da análise com situações que serão discutidas com os participantes.

Strauss & Bichler (1988) conceituaram algumas propriedades que consideram importantes para a construção do conceito de média, quais sejam:

- ✓ A média está localizada entre os valores extremos;
- ✓ A soma dos desvios a partir da média é igual a zero;
- ✓ A média é influenciada por cada um e por todos os valores;
- ✓ A média não precisa, necessariamente, coincidir com um dos valores a partir do qual foi calculada;
- ✓ A média pode ser um valor que pode não corresponder a um dado dentro do conjunto de dados reais da amostra;
- ✓ O cálculo da média leva em consideração todos os valores inclusive os nulos e os negativos;
- ✓ A média é um valor representativo dos dados, ou seja, é o valor que está mais próximo de todos (aspecto espacial);

Batanero (2000) enumera quatro significados em que o conceito de média aritmética emerge, de maneira progressiva:

- ✓ Estimação de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição – cálculo da melhor estimativa de um valor desconhecido;
- ✓ Necessidade de obter um valor justo equitativo para uma distribuição uniforme;
- ✓ Servir de elemento representativo de um conjunto de dados, cuja distribuição é simétrica;
- ✓ Valor mais provável quando aleatoriamente tomamos um elemento de uma população.

Anjos & Gitirana (2008) ao analisarem os livros didáticos do PNLD 2008 perceberam que, dentre as poucas propriedades do conceito de média aritmética, um número reduzido delas é trabalhada de modo satisfatório nesses exemplares.

Mesmo as propriedades que são trabalhadas nesses livros didáticos em maior número, a ênfase dada a elas é insuficiente para que os alunos se apropriem de conhecimentos capazes de compreender a média aritmética enquanto um conceito estatístico.

Pesquisa feita por Strauss e Bichler (1988) mostrou que os alunos têm um domínio satisfatório quando se trata de utilizar o algoritmo da média, porém revelam as dificuldades de compreensão em relação aos diferentes aspectos que emergem do conceito de média.

5. REFERÊNCIAS

ANJOS, D., GITIRANA, V. (2008) *Exploração do conceito de média nos livros didáticos das séries finais do Ensino Fundamental*. Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, pp. 1-9.

BATANERO, C. **Significado y comprensión de las medidas de posición central**. Departamento de Didáctica de La Matemática, Universidade de Granada, 25, 41-58. Disponível em <<http://www.ugr.es/~batanero>>. Acessado em 04/1/2013.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAZORLA, I. M.; CASTRO, F. C. **Papel da Estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico**. Publicatio UEPG: Ciências Humanas, Ciências Sociais Aplicadas, Linguística, Letras e Artes, v. 16, n. 1, 2008.

CAZORLA, I. M. & SANTANA, E. R. S. (Org.). **Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico**. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

CORDANI, L. K. **Ensino de Estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação. USP – SP. 2001.

CORDANI, L. K. **Para além de média-mediana-moda nos primeiros passos da Estatística**. RPM 79. p. 25-28.2012.

TEIXEIRA, P.J.M. **Média aritmética: uma abordagem abrangente é necessária?**. Anais da VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. IMECC-UNICAMP. Campinas. São Paulo. 2012.

TEIXEIRA, P.J.M. **Uma abordagem abrangente sobre média aritmética na Educação Básica é necessária**. Anais do XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. PUC-PR. Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013.