

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Minicurso



MODELOS E MODELAGEM: SOBRE A MATEMÁTICA DAS COISAS

Nelson Hein¹

Adriana Kroenke²

Resumo: A Modelagem Matemática consiste não apenas na arte de traduzir um fenômeno em questão ou problemas da realidade em uma linguagem matemática – modelo matemático, mas sim também inferir na realidade por meio dele, ou seja, o modelo matemático não é apenas a leitura **do** meio, mas também a escrita **no** meio. Um modelo é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Três posturas diferentes que costumam adotar os cientistas ao focar a ideia de modelagem são: a idealista, a pragmática e a realista. O enfoque idealista considera a modelagem como um processo mental, cuja natureza indutiva não determina, e que os conduz à estrutura matemática que representa a realidade, chegando alguns a dizer: “se os fatos não se ajustam à teoria, tanto pior para aqueles”. Para os pragmáticos tudo é questão de ajustar curvas aos dados da realidade e não há propriamente explicação da realidade, mediante a teoria. Parece que a mais razoável é chamada postura realista intermédia entre ambas no sentido de utilizar os ajustes e os dados como metodologia inicial, não terminando aqui senão tratando de chegar a um modelo explicativo da realidade, modelo que sempre se considera provisório, pois novos dados podem induzir a modificações posteriores.

Palavras Chaves: Modelo. Modelagem. Ensino.

1. INTRODUÇÃO

O termo “modelo” possui numerosos significados na linguagem corrente. Neste artigo o seu uso é feito segundo a definição: um modelo é um objeto, conceito ou conjunto de relações, que se utiliza para representar e estudar de forma simples e compreensível uma porção da realidade empírica. Ao representar um objeto ou uma ideia por uma palavra ou frase, ou por um símbolo, já estamos utilizando modelos. E em astronomia quando dizemos que os planetas se movem de acordo com as leis de Kepler, estamos definindo um modelo do sistema solar. Uma maquete de avião é um modelo do avião e o movimento pendular pode-se considerar como um modelo das mudanças da opinião pública: direitas, esquerdas, direitas.

Na linguagem corrente se usa a palavra modelo com o significado de um conjunto de normas ou regras coerentes às que se deve ajustar um conjunto de atividades de um sistema da

¹ Doutor em Engenharia de Produção. Professor do Depto. de Matemática da FURB – Blumenau/SC. hein@furb.br

² Doutoranda em Métodos Numéricos em Engenharia. Professora do Depto. de Matemática da FURB – Blumenau/SC. didlen@terra.com.br

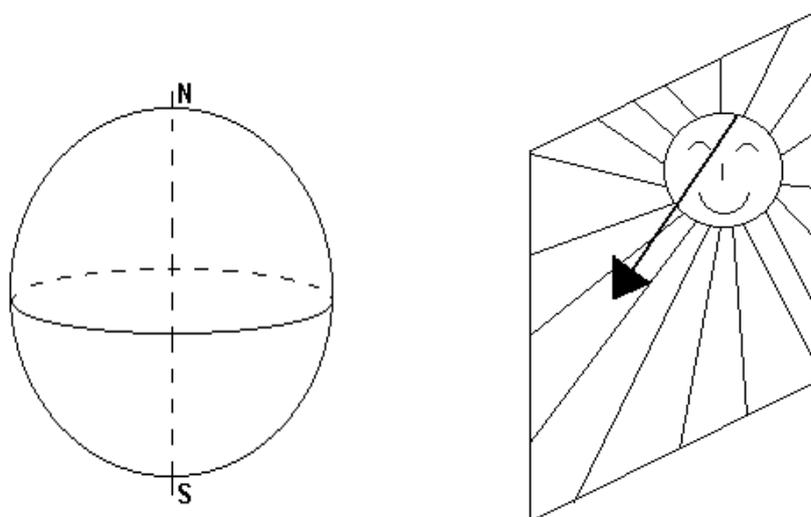
realidade (economia, política e social,...). Assim, se fala de que uma sociedade se ajusta ao modelo liberal ou social democrata, o que tal país é uma ditadura ou uma democracia.

No sucessivo utilizaremos como sinônimos as palavras objeto, protótipo, fenômeno ou sistema empírico para indicar genericamente nosso motivo de estudo mediante a metodologia da modelagem para chegar a uma representação do mesmo por um modelo. A nomenclatura mais habitual será considerar um sistema empírico como um conjunto de elementos empíricos que se relacionam entre si e tem uma entidade e atividade global, em cujo conhecimento estamos interessados. Fala-se hoje habitualmente de sistemas de comunicações de um país, de sistema de armamento de um exército, de sistema nervoso de um homem, de sistemas filosóficos, linguísticos, etc. Veremos a continuação alguns exemplos muito simples de modelagem destes tipos de sistemas que nos permitam vislumbrar toda a amplitude e generalidade desses conceitos que desenvolveremos através de capítulos posteriores.

2. MODELOS ANALÓGICOS: O MOVIMENTO DIÚRNO

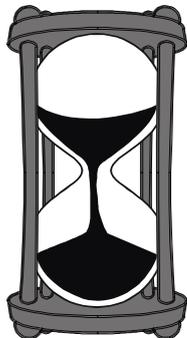
Se considerarmos a terra que chamaremos de T e nos fixarmos no movimento diurno consistente numa volta a cada vinte e quatro horas ao redor de seu eixo, um relógio M pode considerar-se como um modelo do movimento de rotação do sistema empírico T. O ponteiro do relógio de M dá em vinte e quatro horas duas voltas. Trata-se de um modelo analógico em que se representa um fenômeno por outro mais simples produzido por um mecanismo diferente. Outros modelos analógicos de T poderiam ser um relógio de areia, de sol, de quartzo, um girassol, etc, conforme Figura 1.

Figura 1 – Movimento diurno da Terra e Relógios

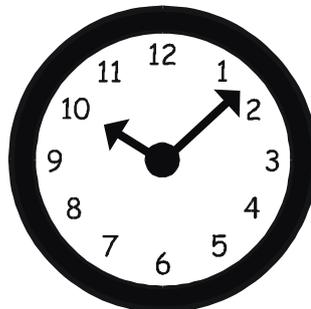


a) Movimento diurno da Terra

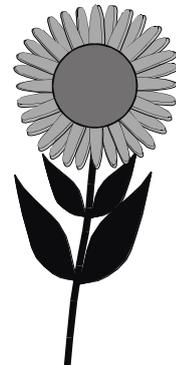
b) Relógio de Sol



c) Relógio de areia



d) Relógio de parede



e) Girassol

Fonte: Elaborado pelos autores.

Tipos especialmente interessantes de modelos analógicos são os modelos icônicos. Com eles se trata de ter uma representação em escala de objetos ou sistemas empíricos, que nos dão através da observação uma ideia do sistema real e de suas propriedades. Assim uma fotografia aérea, um mapa, etc., se utilizam para ter uma ideia de uma região ou de um país, com suas características topográficas, hídricas...

Uma maquete de um avião pode servir para fazer provas de resistência, etc., num túnel aerodinâmico, que possam dar informações sobre o que pode ocorrer com o avião na realidade. Deste modelo icônico M se pode passar a uma maquete ou programa informático M em que, mediante um computador, nos permite estudar melhor o comportamento real do avião.

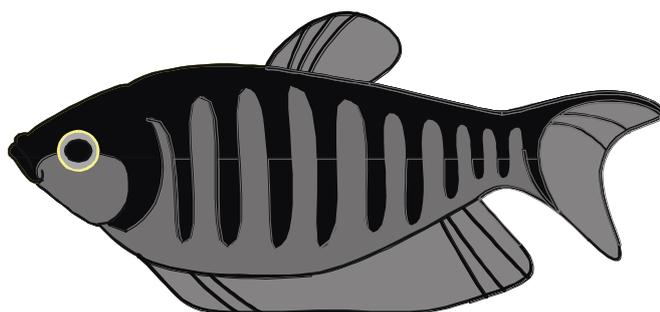
Um exemplo curioso de modelo icônico e o devido a Cayley, que estava buscando no começo do século XIX (recordemos que o primeiro voo conhecido dos irmãos Wright teve início em 1903) a forma da seção transversal de uma asa que minimizaria a resistência no ar. Cayley carecia de técnicas atuais e não podia efetuar os experimentos necessários, mas, pensando que a resistência à água de uma truta seria análoga à resistência ao ar de uma asa e que a natureza por meio dos mecanismos da evolução teria chegado a um bom desenho, concebeu um modelo de seção transversal de uma asa (fig. 3b) com a forma de uma truta (fig. 3a). Cálculos modernos provaram a eficiência deste simples e engenhoso modelo.

Vemos assim que a intuição de analogias e sua posterior confirmação são uma produtiva técnica de criação de novos modelos ou da adaptação dos existentes ao estudo de novos fenômenos. O progresso da ciência baseado na aplicação de modelos analógico é bem conhecido: o modelo do átomo de Bohr mediante o sistema solar, o estudo de circuitos elétricos como análogo a sistemas mecânicos, a Geometria analítica como ponte da Geometria intuitiva a Álgebra, o crescimento de uma epidemia ou dos rumores dum ministério como análogo ao crescimento do número de bactérias num cultivo ou num complexo industrial de automóveis em um país, etc.

3. MODELOS QUALITATIVOS: A OPINIÃO PÚBLICA E O PÊNDBULO

Se considerarmos como sistema S a opinião pública de um país, que vai passando em épocas sucessivas de posições radicais a conservadoras e vice-versa, um modelo M de S pode ser o movimento da Truta. A Truta pode ser vista na Figura 2.

Figura 2 – Movimento da Truta



Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Figura 3 observa-se a seção da asa de um avião.

Figura 3 – Seção da asa de um avião



Fonte: Elaborado pelos autores.

Um pêndulo (se trata de um modelo qualitativo ou verbal). Nestes modelos as relações entre as variáveis não se expressam quantitativamente, o que é, em geral, uma imperfeição do

modelo. Assim mesmo, quando dizemos que o número de células em um cultivo cresce com o tempo, estabelecemos um modelo qualitativo. Muitas vezes estes modelos se complementam com esquemas, gráficos, etc., que representam explicações do enunciado verbal e se utilizam frequentemente na imprensa, rádio, televisão, etc.

4 MODELOS MATEMÁTICOS: UMA VIAGEM DE BICICLETA

Vamos partir de um problema real e simples, a indicar as etapas da modelagem e resolução do problema.

A) Descrição do problema, sistema ou fenômeno real.

Nelson é um garoto inteligente, com a formação matemática do Ensino Médio e um uso aceitável da bicicleta. Vive em Blumenau e quer fazer uma excursão no sábado, depois de almoçar, para chegar a Lapa, que está a 50 km e voltar antes que seja noite. Na Figura abaixo se observa Nelson com sua bicicleta.

Figura 4 – Nelson com sua bicicleta



Fonte: Elaborado pelos autores.

B) Obtenção de informação

Começa por obter informação ou conhecimento sobre as variáveis que entram na situação, que se resume assim:

B₁) Sua velocidade em estrada horizontal e em boas condições sem vento é de 30 km/h

B₂) Faz um pouco de vento na direção e sentido da marcha.

B₃) Pode manter-se em forma normal sem cansaço durante uns 100 km.

B₄) A temperatura à tarde vai ser 22° e, provavelmente, não choverá.

B₅) A estrada está em bom estado e praticamente horizontal em todo o trajeto.

Trate agora de estabelecer quais variáveis deve relacionar com estas informações. É bastante consistente que a B_4 apenas tem interesse ou influência (só se houvesse uma temperatura extremamente alta ou baixa, ou forte chuva, etc.).

Por suas múltiplas experiências e conhecimentos científicos e ciclistas tem o conhecimento de que o que mais influi na duração da viagem, suposição verificadas nas condições B_3 e B_5 , é a velocidade do vento. Chegou a essa consequência, trás algumas provas de que com um vento de velocidade similar a esperada no dia da excursão, sua velocidade frente ao vento é 27 km/h e com o vento nas costas de 33 km/h.

C) Modelo empírico de relações

Trata agora explicar mediante um esquema empírico o primeiro processo de abstração matemática nesta realidade. Admite a simplificação que ele é um ponto sobre o que atuam duas forças: o impulso que ele dá a bicicleta mediante o mecanismo da mesma (que neste problema não é o caso) e o empuxo do vento sobre seu corpo. Se ele for no sentido Curitiba - Lapa ou ao contrário, ambas forças se somam ou restam. Isso dá lugar a que se tenha uma velocidade soma $30 + 3 = 33$ ou diferencia $30 - 3 = 27$, que resulta de suas experiências anteriores. Admitindo este esquema empírico do problema, a solução já é fácil, pois se a velocidade é aproximadamente uniforme de 33 km/h, isto quer dizer que a longitude percorrida é proporcional ao tempo empregado e, por tanto, terá demorado na viagem de ida 50 min e 33 seg., e ao voltar 50 min e 27 seg., o que dá um total de 01h40min horas.

Convém assinalar que Oscar é consciente de que simplificou um pouco o problema ao admitir a constância da velocidade que na realidade é algo variável, como pode comprovar ao repetir um mesmo trajeto em certo número de vezes em condições aproximadamente invariáveis de um a outro experimento. Outras simplificações que foram feitas são supor que a velocidade do vento é constante, e que a temperatura não influi em nada, etc.

Ao fazer estas indicações queremos observar que as aplicações de matemática que fazem os economistas, engenheiros, biólogos, vão sempre precedidas de uma série de simplificações da realidade sem as quais é impossível chegar a um modelo matemático dirigido, e dizer, que nos permita resolver os problemas reais ainda que seja de forma aproximada.

D) Conceitualização E) Modelo Matemático

Nelson pretende chegar um pouco mais longe, e trata de que um modelo matemático lhe permita resolver outras situações similares, mas com dados diferentes relativos a seu

impulso e à força do vento, e calcular o tempo de duração da viagem, a partir do dado fundamental da distância percorrida.

Passando a representar por símbolos, sendo c a velocidade do ciclista (sem vento) e v o componente devido ao vento. Se d é a distância percorrida em um e outro sentido, o tempo empregado será, analogamente: $t(d) = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v}$, eq. 1

F) Processo lógico dedutivo e G) Consequências matemáticas do modelo

É claro que se outra viagem se realizasse nas mesmas condições, e a distância fosse d' , o tempo resultante seria: $t(d') = d' \times \left[\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right]$, eq. 2 e podemos calcular o cociente $\frac{t(d')}{t(d)} = \frac{d'}{d}$, eq. 3 o que nos permite obter $t(d') = t(d) \frac{d'}{d}$, eq. 4 o que já é uma consequência no trivial obtida através do modelo: a duração de uma viagem é proporcional à distância (observe que a viagem tem trajetos com diferentes velocidades).

H) É natural desconceitualizar, é dizer, passar do modelo e suas consequências às aplicações obtendo.

I) Relações empíricas

Por exemplo, por um breve experimento de uma viagem de 10 km/h de ida e volta podemos calcular $t(d') = t(10) \frac{d'}{10}$, eq. 5 e comprovaremos se o resultado experimental não discrepa do teórico.

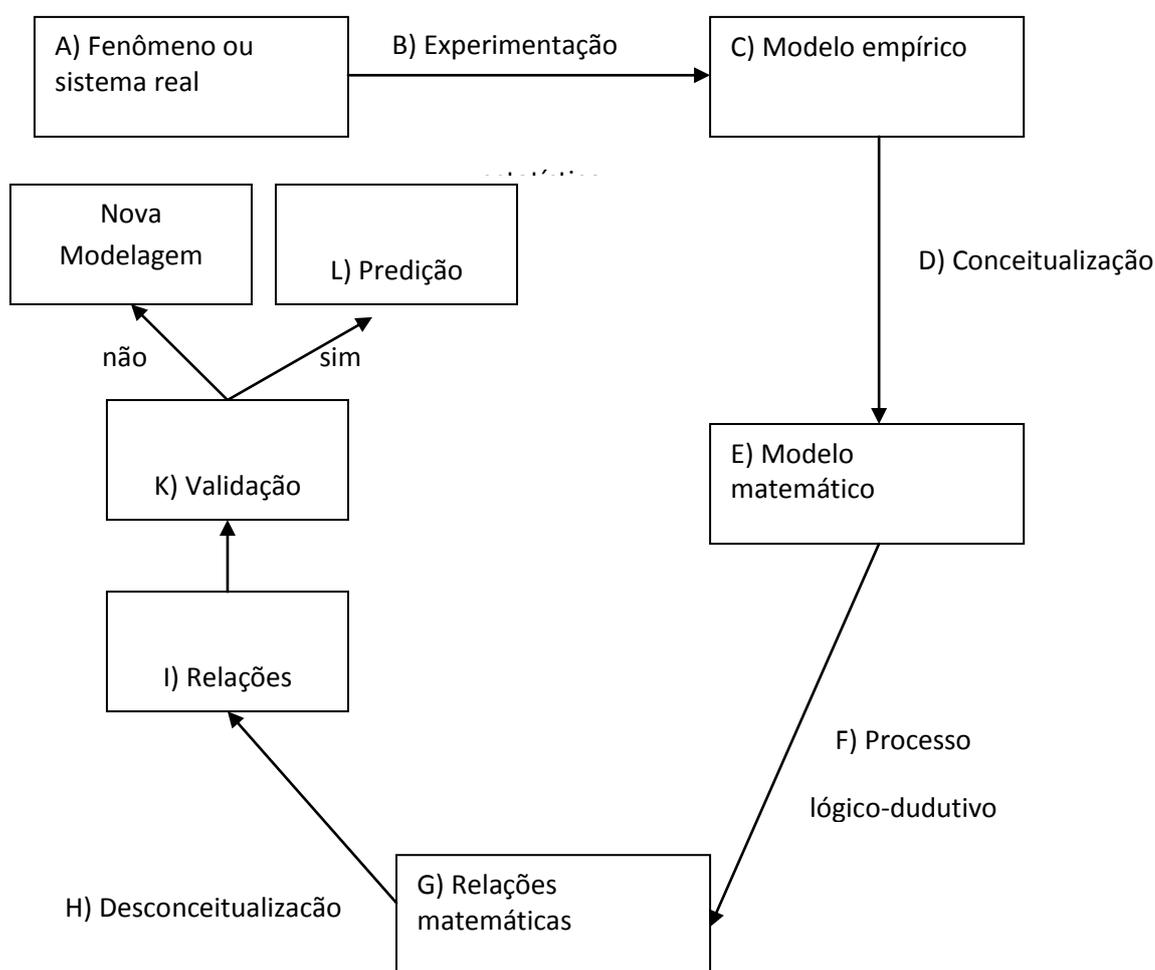
K) Este é um ponto de partida para a validação do modelo ou sua rejeição vendo se a repetição da viagem análoga confirma ou não o resultado obtido pelo cálculo. Aceitado o modelo (1) após a validação, se utilizará para a predição (L) de novos resultados. Se o modelo não se considera válido há de começar novamente o processo, tendo em conta o aprendido, para chegar a um novo modelo.

É interessante observar as diferenças entre situações do tipo anterior em que se há de modelar ou buscar um modelo matemático da mesma, e os problemas tradicionais nos livros de matemática em que a implantação dos dados no esquema de solução já conhecida é imediata.

Em compensação, ao tratar de formular o modelo matemático, simplificamos a realidade ficando com aquelas variáveis que consideramos que são realmente importantes.

Não é conveniente deixar no modelo, mais variáveis do que as realmente necessárias para refletir bem a parte da realidade que nos interessa, porque justamente o que nos propomos é compreender melhor essa realidade através de um esquema simples ou apropriado. No esquema adjunto se resumem as etapas principais, vistas no exemplo que permitirão em forma análoga, com mais dificuldades em umas etapas ou em outras, chegar a aprofundar-se no processo projeto e modelagem de problemas da realidade, que é prévio a seu tratamento matemático convencional e requer atividades intelectuais diferentes.

Figura 5. Esquema prático da modelagem matemática



Observemos que a matemática, que tradicionalmente nos ensinam intervem quase exclusivamente em F) processo lógico-dedutivo.

5. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Para fazer uma exposição da metodologia da modelagem que estimule a aprendizagem e a criatividade do estudioso, queremos nos fixar especialmente nos objetivos e aspectos

essenciais dos processos de modelagem deixando de lado a classificação que resulta em fixarmos especialmente nas técnicas matemáticas que se utilizam (equações algébricas, diferenciais, espaços métricos), as ciências que se aplicam (biologia, economia, física, etc.).

Fixarmo-nos em alguns dos seguintes: crescimento, equilíbrio, medida, organização, planificação, ordenação, preferência, eleição, movimento, realimentação, otimização, acaso, risco, incerteza, simulação, competitividade, indução, utilidade, decisão, sistema, jogo. Todos eles correspondem às ideias fundamentais que aparecem nas mais diversas situações reais.

Três posturas diferentes que costumam adotar os cientistas ao focar a ideia de modelagem são: a idealista, a pragmática e realista.

O enfoque idealista considera a modelagem como um processo mental, cuja natureza indutiva não determina, e que os conduz à estrutura matemática que representa a realidade, chegando alguns a dizer: “se os fatos não se ajustam à teoria, tanto pior para aqueles”.

Para os pragmáticos tudo é questão de ajustar curvas aos dados da realidade e não há propriamente explicação da realidade, mediante a teoria. Parece que a mais razoável é chamada postura realista intermédia entre ambas no sentido de utilizar os ajustes e os dados como metodologia inicial, não terminando aqui senão tratando de chegar a um modelo explicativo da realidade, modelo que sempre se considera provisório, pois novos dados podem induzir a modificações posteriores. E nos exemplos vistos ao longo deste minicurso se confirmam estas ideias.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACKOFF, Russel; SASIENI, Maurice. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1979.

BARROSO, Leônidas C. **Cálculo Numérico com Aplicações**: São Paulo: Harbra, 1992.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática**. 2^a ed., Blumenau: Edifurb, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 3^a ed., São Paulo: Contexto, 2004.

BRUTER, Claude-Paul. **Compreender as Matemáticas – as dez noções fundamentais**. Lisboa: Instituto Piaget Divisão Editorial, 1998.

DESCARTES, René. **Discurso do Método**. 4ed. São Paulo: Nova Cultural, 1987.

GOLDBARG, Marco C.; LUNA, Henrique P. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

HOBBS, Thomas. **Leviata ou Matéria**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

TAMAYO, Ruy Pérez. **Existe el Método Científico?** Ciudad de México DF: Ciencia para Todos, 1990.