A ABORDAGEM DE NÃO CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS NA DISCIPLINA DE GEOMETRIA PLANA DE UM CURSO DE LICENCIATURA

Paulo Roberto Vargas Neves[1]

Alan Henrique Gomes Coimbra[2]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Esta pesquisa foi idealizada após o autor ministrar, por algumas ocasiões, disciplinas e oficinas de Geometria Plana em cursos de Licenciatura em Matemática, bem como em um curso de Especialização em Educação Matemática. Os casos de congruência de triângulos muitas vezes são apresentados de maneira dogmática, como critérios que, se satisfeitos, mesmo não importando exatamente o porquê, são suficientes para garantir a congruência de triângulos. Essa concepção parece permanecer em muitos licenciandos e professores de Matemática, mesmo depois de terem cursado a disciplina de Geometria Plana: ao perguntar se existiam dois triângulos não congruentes com quatro ou cinco pares de elementos (lados ou ângulos) congruentes a resposta normalmente era negativa, sendo justificada pelo fato de que se com três pares de elementos em comum já ocorreria congruência (mesmo sendo três elementos específicos), com mais de três a congruência já estaria garantida. Tais argumentos indicam que, possivelmente, os critérios de congruência não foram compreendidos como situações onde não se consegue construir outro triângulo (não congruente) a um triângulo dado com aquelas características estabelecidas nos casos de congruência, isto é, a concepção destes critérios não está relacionada com construções geométricas. Este trabalho tem como intenção discutir esta questão de geometria, assim como propor uma alternativa de tratamento para este conteúdo, relacionando-o com outros tópicos de geometria plana, tais como construções geométricas, condições de existência de triângulos, semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras e sua recíproca e número de ouro.
Palavras Chaves: Geometria. Construções Geométricas. Triângulos. Congruência.

Introdução

Após ministrar algumas vezes a disciplina de Geometria Euclidiana Plana em um curso de Licenciatura em Matemática e por uma oportunidade a disciplina de Oficina de Geometria Plana em um curso de Especialização em Educação Matemática, o autor percebeu que, com muita frequência, professores licenciados ou em formação não tem clara a

[1] Mestre em Educação Matemática. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo – IFSP – *campus* Araraquara. paulonevess@hotmail.com
[2] Licenciando em Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo *Campus* Araraquara. alaan_coimbra@hotmail.com

concepção dos casos de congruência de triângulos, uma vez que entendem tais critérios como resultados postulados ou os confundem com a própria definição de congruência de triângulos. As inquietações causadas por esta questão, as discussões em sala de aula e seus respectivos encaminhamentos motivaram este trabalho de pesquisa que pretende propor uma alternativa para a abordagem do conteúdo de congruência de triângulos, relacionando-os outros assuntos de geometria plana, tais como construções geométricas, condições de existência de triângulos, semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras e sua recíproca e número de ouro. Para tanto, é proposta aqui a mesma questão que surgiu como fruto das discussões oriundas das situações acima descritas:

Entendendo lados ou ângulos como elementos de um triângulo, é possível dois triângulos não congruentes possuírem três, quatro ou cinco pares de lados congruentes?

Dizer que satisfazer as condições de um dos critérios de congruência é o suficiente para garantir a congruência de triângulos significa, em outras palavras, que sob aquelas condições só é possível construir, com régua e compasso,um único triângulo ou, sendo mais rigoroso, uma classe de triângulos congruentes àquele triângulo dado.

A estratégia utilizada para responder a pergunta central do trabalho será a exploração, através de construções geométricas, das possibilidades em que não ocorre congruência de triângulos, isto é, explorar o problema na tentativa de construir dois triângulos não congruentes com três, quatro ou cinco pares de elementos comuns.

No que diz respeito ao desenvolvimento desta temática, uma possibilidade interessante é recorrer à *softwares* de geometria dinâmica.

A definição e os critérios de congruência de triângulos

Segundo uma definição de congruência de triângulos bastante utilizada na geometria euclidiana plana, “dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.” (BARBOSA J. L. M., 2006, p. 56). Neste caso, os dois triângulos terão os seis pares de elementos congruentes, de acordo com a linguagem proposta na questão norteadora deste trabalho.

Já os critérios de congruência são quatro:

- LLL ou lado-lado-lado. Dois triângulos possuem ordenadamente três pares de lados congruentes;

- LAL ou lado-ângulo-lado. Dois triângulos possuem ordenadamente dois pares de lados e um par de ângulos em comum, isto é, o ângulo é formado pelas retas suportes dos lados em questão;

- ALA ou ângulo-lado-ângulo. Dois triângulos possuem ordenadamente dois pares de ângulos e um par de lados em comum, ou seja, o referido lado é comum aos dois ângulos;

- LAA_o ou lado-ângulo-ângulo oposto. Dois triângulos possuem ordenadamente um par de lados e dois pares de ângulos em comum, em que o primeiro ângulo é adjacente e o segundo oposto ao lado em questão.

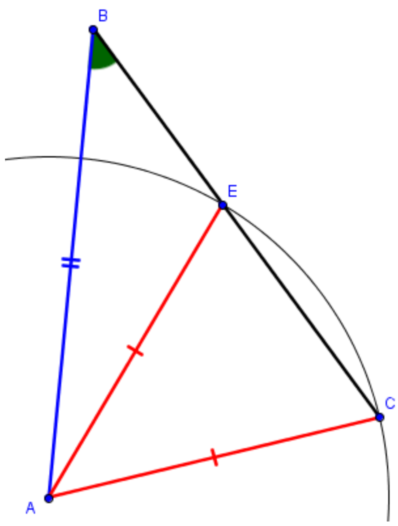
1. Possibilidades de triângulos com três pares de elementos em comum

Primeiramente, serão analisados os casos de triângulos não equiláteros[3] com três pares elementos em comum.

As possibilidades são dos triângulos possuírem: dois pares de lados e um par de ângulos, dois pares ângulos e um par de lados e, três pares de ângulos em comum, pois, caso dois triângulos tenham os três lados em comum, de acordo com o critério LLL de congruência, eles seriam congruentes entre si.

1.1 <u>Dois pares de lados e um par de ângulos</u>

No primeiro caso, se, em dois triângulos, forem congruentes dois pares de lados e um par de ângulos, onde o ângulo em questão se localiza, em cada triângulo, entre os dois lados, então, os triângulos serão congruentes pelo critério LAL. Resta avaliar as seguintes opções:



1.1.1 <u>Triângulos que possuem em comum dois pares de lados e um par de ângulos que não estejam entre esses lados</u>

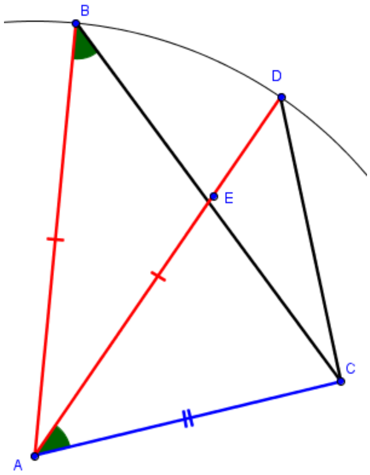
Dado o triângulo ABC, suponha que AC seja o lado de menor medida. Traçando um círculo com centro em A e raio AC, obtemos o ponto E, tal que ele seja interseção entre o círculo e o lado BC. De acordo com a construção descrita, os triângulos BAC e BAE possuem LLA congruentes (por construção AC = AE, BA é lado comum e B é ângulo comum) e como podemos observar, não são

[3] Dois triângulos equiláteros que tiverem em comum um lado congruente já serão congruentes.

triângulos congruentes, já que BC e BE, por construção, tem medidas distintas.

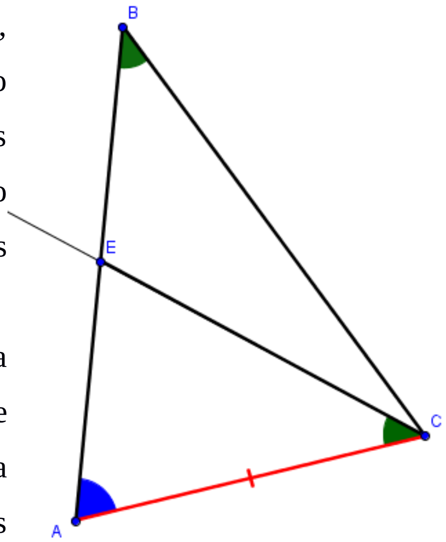
1.1.2 Triângulos que tem dois pares de lados e um par de ângulos não homólogos[4] em comum

Considere o triângulo ABC não isósceles. Suponha que B seja o ângulo de menor medida. Traçando a semirreta S_{AE}, tal que os ângulos EAC ABC sejam congruentes e fazendo um círculo de centro em A e raio AB, obtém-se o ponto D de interseção do círculo com S_{AE}. Assim, os triângulos ABC e DAC têm dois pares de lados e um par de ângulos congruentes (AB e AD, por construção, AC é lado comum e os ângulos congruentes, por construção, ABC e DAC) e, ainda assim, não são congruentes.



1.2 Dois pares de ângulos e um par de lados

Se, em dois triângulos, forem congruentes dois pares de ângulos e um par de lados, tal que, em cada triângulo, esse lado esteja entre os dois ângulos, então eles seriam congruentes pelo critério (ALA). Em outra situação, caso os ângulos congruentes sejam homólogos, então os referidos triângulos seriam congruentes pelo critério (LAAo) e, portanto, resta a opção dos triângulos terem um lado, um ângulo adjacente ao lado, e outro ângulo, tal que esse ângulo não seja homólogo nos dois triângulos.



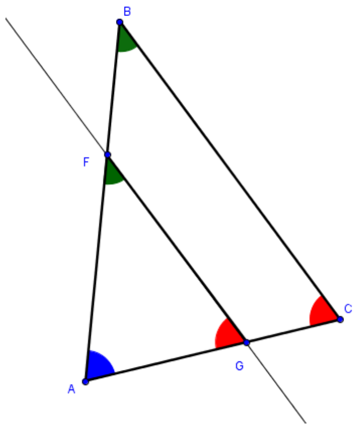
Dado um triângulo ABC escaleno[5], tal que B seja o menor ângulo. Traça-se a semirreta S_{CE}, de modo que os ângulos ACE e ABC sejam congruentes e E seja a interseção de S_{CE} com AB. Sendo assim, os triângulos AEC e ACB possuem dois pares de ângulos e um par de lados congruentes (A é ângulo comum, os ângulos ACE e ABC são congruentes e AC é lado comum) e ainda assim, por

[4] Ângulos (ou lados) homólogos são ângulos (ou lados) que estão na mesma posição no triângulo.
[5] Se adicionar a hipótese do triângulo ABC ser isósceles, ABC e ACE serão triângulos equiângulo e, por terem um lado de medida comum, seriam dois triângulos equiláteros congruentes.

construção, não são triângulos congruentes (são triângulos semelhantes com razão de semelhança AC/AB ≠ 1).

1.3 <u>Três pares de ângulos</u>

Dado o triângulo ABC, traçando uma reta paralela ao lado BC que não passe por B, de modo que ela intercepte os outros dois lados (ou suas retas suportes) do triângulo nos pontos F e G, obtém o segmento FG. Devido ao fato da reta FG ser paralela ao lado BC, os pares de ângulos B e F, bem como C e G são correspondentes e, portanto, congruentes de maneira que os triângulos AFG e ABC têm três pares de ângulos congruentes, sendo assim semelhantes pelo critério AA e, por construção, não congruentes.



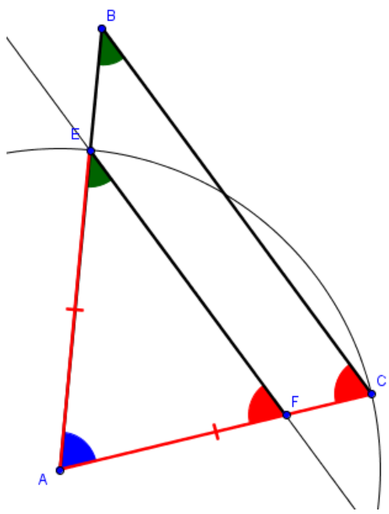
2. Os casos com quatro pares de elementos em comum

Ao analisar os possíveis casos de não congruência de dois triângulos que tenham congruentes quatro pares de elementos em comum, chega-se a duas possibilidades:

Três pares de ângulos e um par de lados ou dois pares de lados e dois pares de ângulos.

2.1 <u>Três pares de ângulos e um par de lados</u>

Nesta primeira situação, se nos dois triângulos, o lado em questão estiver entre ângulos homólogos congruentes, os triângulos serão congruentes pelo critério ALA, portanto, os lados congruentes não poderão ser homólogos.



Considerando o triângulo ABC, suponha que AC seja o lado de menor medida. Traçando um círculo com centro em A e raio AC, obtém-se o ponto E pertencente ao lado AB. Construindo uma paralela ao lado BC passando por E, denomina-se F o ponto pertencente à intersecção desta com AC. Assim, de EF//BC, os pares de ângulos correspondentes AEF e ABC bem como AFE e ACB são congruentes. Como A é ângulo comum e AC e AE são congruentes, os triângulos ABC e AEF têm três pares de ângulos e um par de lados congruentes e, ainda assim, por construção, não são congruentes.

2.2 Dois pares de ângulos e dois pares de lados

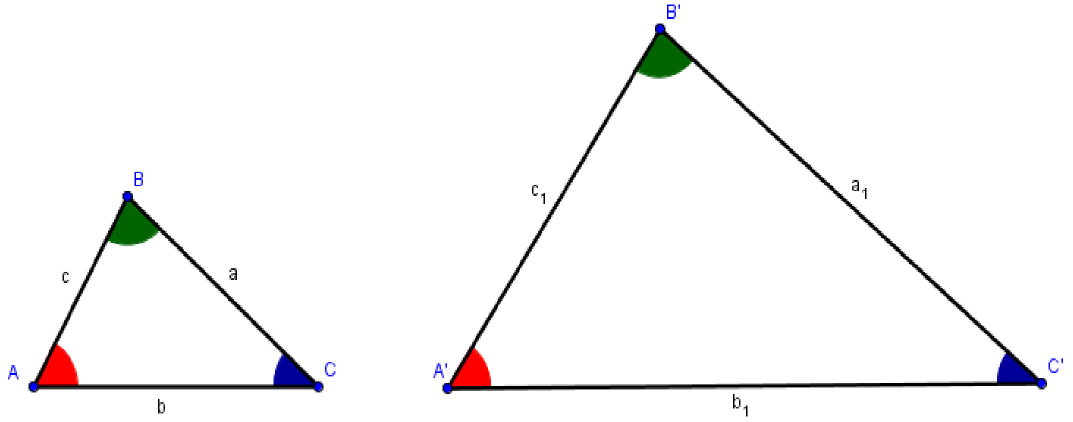
Caso dois triângulos possuam dois pares de ângulos congruentes, o terceiro par de ângulos será congruente. Portanto, trata-se do caso de dois triângulos com cinco elementos em comum: três pares de ângulos e dois pares de lados. Esta curiosa situação, de dois triângulos possuírem cinco pares de elementos em comum sem que haja congruência de triângulos, é estudada mais detalhadamente a seguir.

3. O caso de cinco pares de elementos em comum

Para cinco elementos, tem-se as seguintes possibilidades: três pares de lados e dois pares de ângulos ou três pares de ângulos e dois pares de lados em comum. Como na primeira possibilidade os triângulos seriam congruentes pelo caso LLL, resta estudar a segunda situação.

3.1 Obtendo os lados dos triângulos

Suponha que existam dois triângulos ABC e A'B'C' que possuam três ângulos congruentes e apenas dois lados de mesma medida. Eles seriam necessariamente triângulos semelhantes (pelo critério AA de semelhança). Se a razão de semelhança entre os triângulos for denominada de k, o objetivo será determinar, caso seja possível, as medidas e a posição destes dois (pares de) lados e as condições que caracterizam a constante k.



Suponha que os pares de ângulos A e A', B e B' e C e C' sejam congruentes e, sendo assim, pelo critério AA, os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes. Seja *k* a razão de semelhança entre os triângulos:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$$

Se os lados homólogos forem congruentes, então, pelo critério LAL, ALA ou mesmo LAA_O, o triângulo ABC seria congruente à A'B'C', portanto, lados homólogos devem ter medidas diferentes, ou seja, $a \neq a_1$, $b \neq b_1$ e $c \neq c_1$. Assim, por exemplo, a medida c deve ser diferente de c_1. Considerando, sem perda de generalidade[6], $c = b_1$, seguem desta igualdade duas possibilidades:

(I) $b = c_1$ ou

(II) $b = a_1$.

Em (I), se $c = b_1$ e $b = c_1$, então $\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} => \frac{b_1}{b} = \frac{b}{b_1} => b = b_1$, e, neste caso os triângulos seriam congruentes, portanto, esta hipótese deve ser descartada.

Em (II), se $c = b_1$ e $b = a_1$, tem-se que:

$\frac{a_1}{a} = k => a_1 = ak$, de $b = a_1$, resulta $b = a_1 = ak$

$\frac{b_1}{b} = k => \frac{b_1}{ak} = k = b_1 = ak^2$, e de $c = b_1$, obtém-se $c = b_1 = ak^2$

e também: $\frac{c_1}{c} = k => \frac{c_1}{b_1} = k => \frac{c_1}{ak^2} = k => c_1 = ak^3$

Resumindo, o triângulo ABC tem lados de medidas a, $b = ak$ e $c = ak^2$, enquanto os lados correspondentes do triângulo A'B'C' tem medidas $a_1 = b = ak$, $b_1 = c = ak^2$ e $c_1 = ak^3$.

3.2 Obtendo a razão de semelhança k

Considerando os dois triângulos semelhantes (e não congruentes): um com lados de medidas a, ak e ak^2 e o outro ak, ak^2 e ak^3, ou seja, com dois pares de lados (ak e ak^2), e os três pares de ângulos congruentes, nota-se que os lados de cada triângulo estão em uma progressão geométrica de mesma razão *k* de semelhança entre os dois triângulos, com $k \neq 1$.

Agora é preciso analisar sob quais condições essas medidas de lado formam triângulos. Uma vez que a constante $k > 0$ e $k \neq 1$, temos duas possibilidades:

P1) $k > 1$

Para $k > 1$, as condições de existência dos triângulos se resumem a duas inequações equivalentes: $ak^2 < ak + a$ e $ak^3 < ak^2 + ak$. Resolvendo-as chegamos que

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (*)

[6] O caso de $c = a_1$ é análogo.

Chamando de ϕ o valor do número de ouro e lembrando que $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}68$, a condição * se resume a: 1 < k < ϕ

P2) 0 < k < 1

Se 0 < k < 1, as condições (equivalentes) para que os triângulos em questão existam são

$a < ak + ak^2$ e $ak < ak^2 + ak^3$,

que resulta em $k < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $k > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, mas como 0 < k < 1, chega-se a

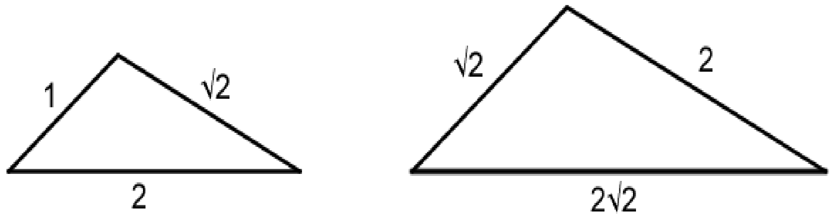
$\phi - 1 < k < 1$ (**)

De (*) e (**), resulta que os valores da razão de semelhança k que satisfazem a relação do caso de não congruência de cinco pares elementos:

$\phi - 1 < k < \phi$, com $k \neq 1$.

Como $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$, o intervalo acima pode ser escrito como $\frac{1}{\phi} < k < \phi$. Assim, a partir de agora, apenas por comodidade, ao invés de se considerar $\phi - 1 < k < 1$, os cálculos serão feitos com $1 < k < \phi$. Em outras palavras, a partir de um triângulo, vamos apenas criar triângulos semelhantes de medidas maiores, pois, se a razão de semelhança entre as medidas do triângulo maior e as do triângulo menor satisfizerem a relação $1 < k < \phi$, então a razão entre as medidas do menor e do maior será $\frac{1}{k}$ e pertencerá ao intervalo $]\frac{1}{\phi}, 1[$. Por exemplo, se a relação entre as medidas dos lados dos triângulos maior e menor é $k = \frac{3}{2}$, que pertence ao intervalo $]1, \phi[$, então a relação entre as medidas dos triângulos pequeno e grande é $\frac{1}{k} = \frac{2}{3}$, que está em $]\frac{1}{\phi}, 1[$.

Agora, com o que foi descoberto acima, pode-se criar triângulos semelhantes e não congruentes com dois pares de lados e três pares de ângulos congruentes. Bastam os lados dos triângulos estarem em uma progressão geométrica cuja razão seja igual à razão de semelhança entre os triângulos e satisfaça a relação $1 < k < \phi$. Por exemplo, com $k = \sqrt{2}$, e a = 1, temos os triângulos de lados$1, \sqrt{2}, 2$ e $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$:

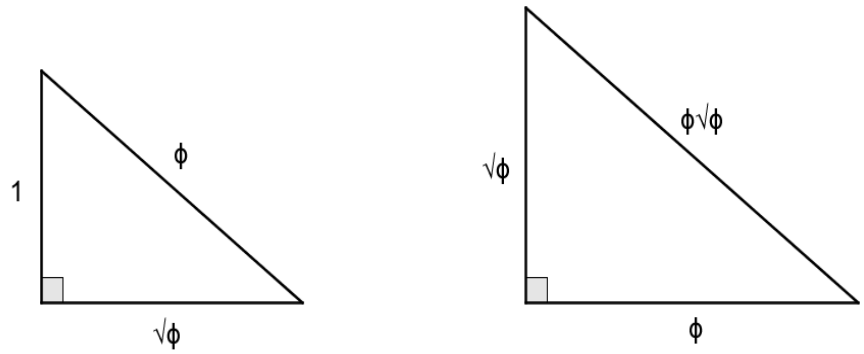


3.3 Triângulos retângulos não congruentes com cinco pares elementos respectivamente congruentes

Sejam dois triângulos retângulos semelhantes. Neste caso, suponha, sem perda de generalidade, que k > 1, apenas para que se possa dizer que o maior lado é ak^2. Para que o triângulo seja retângulo, as medidas dos seus lados devem de satisfazer à seguinte condição (recíproca do teorema de Pitágoras):

$$(ak^2)^2 = (ak)^2 + a^2 => a^2k^4 = a^2(k^2+1) => k^4 - k^2 - 1 = 0$$

Resolvendo a equação, obtém-se que $k = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, ou seja, $k = \sqrt{\phi} \cong 1{,}27$, satisfazendo a condição de $1 < k < \phi$. Portanto, pode-se concluir que existem dois triângulos retângulo não congruentes com cinco pares de elementos em comum:



Conclusões

O material proposto neste trabalho tem o objetivo de criar um entendimento mais significativo para o conteúdo de congruências de triângulos da disciplina de Geometria Euclidiana Plana e, para tanto, propõe o estudo de situações onde não ocorre a congruência.

Ao estudar os motivos da não ocorrência da congruência, o aluno, além de perceber a importância de se satisfazer as hipóteses dos critérios de congruência, tem a oportunidade de discutir outros conteúdos de geometria plana de maneira integrada com o tópico estudado, como ocorreu ao analisar as condições de formação de triângulos, as situações onde os triângulos eram semelhantes e até mesmo, se deparar com o número de outro e explorar suas propriedades. O teorema de Pitágoras (e sua recíproca) também pode ter uma discussão mais aprofundada caso o professor responsável pela disciplina entenda ser adequado na ocasião.

O presente artigo não tem a pretensão de prescrever uma sequência de atividades para ser utilizada em sala de aula, mas sim de discutir o conteúdo em questão, de maneira que o professor possa criar condições (e atividades) para que seu aluno explore os casos de congruência e de não congruência de triângulos. Esta possibilidade de experimentação, por ser utilizada de forma integrada com outros conteúdos de geometria plana, contribui para que o aprendiz tenha melhor clareza na compreensão do tema e da geometria de modo mais amplo.

Ao experimentar e discutir com os colegas de sala tais questões, cria-se um ambiente fértil para que se desenvolva conjecturas. A conclusão da validade ou não destas conjecturas, passa pela necessidade da demonstração, resultando em um entendimento mais efetivo do assunto.

Referência Bibliográfica

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 240 p.

Bibliografia

BARBOSA, R. M. Números de Fibonacci e triângulos não congruentes com cinco pares de elementos respectivamente congruentes. **Boletim do Departamento de Matemática.** Blumenau, n. 27, p. 1-10. 1992.

BIEMBENGUT M. S. **Número de Ouro e Secção Áurea: considerações e sugestões para a sala de aula**. Blumenau: Ed. Da FURB, 1996. 69 p.

MOISE, E. E; DOWNS, F. L. **Geometria Moderna**. São Paulo: Edgard Blucher, 1971. Parte I. 343 p.

NETTO, S. L. **Construções Geométricas: exercícios e soluções**. Rio de Janeiro: SBM, 2009. 142 p.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: SBM, 1993. 110 p.