

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO EN LA EDUCACIÓN A DISTANCIA ONLINE

EDISON ALBERTO SUCERQUIA VEGA¹

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO²

CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ³

Educación Matemática, Tecnologías Informáticas y Educación a distancia

Resumen. La educación a distancia en la modalidad online, ha sido una de las oportunidades que los estudiantes de algunas regiones de Colombia han tenido para lograr una educación a nivel superior. El programa de Educación virtual “Ude@” de la Universidad de Antioquia, ha ofrecido por más de una década cursos en esta modalidad, sin embargo, específicamente en los cursos de matemáticas, no se han desarrollado estudios que indaguen sobre la manera como los estudiantes producen conocimientos matemáticos asociados al proceso de aprendizaje de esta área. Según los planteamientos del constructo teórico “Humans-with-media”, la producción de conocimiento matemático está directamente relacionada con la interacción social, la interpretación individual y los medios. Teniendo en cuenta estos aspectos, el estudio utiliza una entrevista de carácter socrático, los mapas conceptuales y las interfaces del programa Ude@ para analizar la manera en que un colectivo de estudiantes producen conocimiento matemático en la modalidad online, asociado a uno de los teoremas centrales de un curso de cálculo integral, al cual subyacen una gran cantidad de conceptos matemáticos que involucran procesos de razonamiento infinito: El Teorema Fundamental del Cálculo.

Palabras claves: Educación a distancia online. Producción de conocimiento matemático. Teorema Fundamental del Cálculo.

CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO

En la actualidad, la educación matemática está siendo permeada por el uso de interfaces tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de conocimientos específicos; algunos autores como Borba; Villarreal (2005), Zulatto (2007) y Barbosa (2009) argumentan que favorecen la visualización, experimentación y producción de conocimiento.

¹ Magíster en Educación. Estudiante de Doctorado en Educación. Universidad de Antioquia. esucerquia@gmail.com

² Doctor en Educación. Universidad de Antioquia. rene2@une.net.co

³ Doctor en Ciencias Matemáticas. Universidad de Antioquia. cama@matematicas.udea.edu.co

Las interfaces y entornos que el internet ofrece en una modalidad de cursos de matemática online, fue desarrollada en algunos países como Brasil, para acelerar los procesos de formación de maestros como política pública durante los años 2000 al 2002. Actualmente, en Colombia la modalidad online está siendo impulsada y desarrollada para su uso en los programas de formación de maestros y estudiantes tanto a nivel de pregrado como de postgrado en muchas Universidades, en particular, el programa Ude@ de la Universidad de Antioquia.

Programa de Educación Virtual Ude@

En el contexto local, desde hace aproximadamente 10 años la Universidad de Antioquia a través del programa Ude@, ha venido construyendo espacios para la formación de estudiantes de la Facultad de Ingeniería, los cuales se desarrollan en un alto porcentaje en la modalidad online y, a su vez, los estudiantes interactúan con los docentes en diferentes entornos virtuales, lo que genera un espacio académico para que mediante la manipulación de los medios se pueda construir conocimiento. El presente estudio centra su atención en la producción de conocimiento matemático en la modalidad a distancia online, asociado al Teorema Fundamental del Cálculo, en uno los cursos básicos de matemáticas del programa de educación virtual Ude@: El Cálculo Integral.



Imagen del sitio web del programa Ude@:

<http://www.udea.edu.co/portal/page/portal/Programas/udearoba>

En Ude@ los cursos de matemáticas son desarrollados en dos entornos virtuales; el primero de ellos es una Plataforma Moodle, donde se publican los contenidos, documentos, cronogramas, videos, textos, ejercicios, entre otros, para el desarrollo del curso, el cual se encuentra permanentemente activo durante el período académico; el segundo, es una plataforma WiziQ que se utiliza para las videoconferencias, propicio para el encuentro “virtual”, la discusión, socialización y comunicación del docente con los estudiantes, esta última plataforma además de las herramientas para la videoconferencia (video, audio y chat) tienen una pizarra, permite subir documentos y enlaces a videos en la web y grabar las sesiones desarrolladas que posteriormente los estudiantes pueden revisar y son programadas para un semestre con una intensidad de 4 horas por semana.

En este sentido, el presente estudio pretende examinar cómo las interfaces (herramientas tecnológicas utilizadas para interactuar con la información), modifican las formas y métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el programa Ude@, además de explorar la manera en que estos estudiantes generan los conocimientos matemáticos, otro aspecto que ha motivado la presente investigación.

Pregunta de investigación

En la educación matemática desarrollada de manera online, algunos investigadores han planteado la preocupación por la naturaleza de la construcción del conocimiento matemático en esta modalidad, formulando algunos interrogantes como:

- ¿Cómo la reorganización del pensamiento tiene lugar en los cursos a distancia realizados a través del internet? (BORBA; VILLAREAL, 2005, p.173)
- ¿Qué tipo de aprendizajes en matemáticas pueden realizar los alumnos involucrados en un ambiente virtual? (DUARTE; et al, 2008, p.369)
- ¿Cómo ocurre el proceso de enseñanza y aprendizaje? (BORBA, 2011, p. 21)

En este sentido, el presente estudio indaga sobre:

- ¿Qué aspectos están involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediante un ambiente virtual?
- ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que producen los estudiantes en una modalidad virtual?

Dado lo anterior, la investigación centra su interés en la siguiente pregunta de investigación:

¿De qué manera un colectivo de estudiantes en la modalidad de educación a distancia online del programa Ude@, produce conocimiento matemático asociado al teorema fundamental del cálculo?

MARCO DE REFERENCIA

Educación a distancia Online

La educación a distancia para Moran (2002), “es el proceso de enseñanza y aprendizaje, mediado por las tecnologías, donde profesores y alumnos están separados en el espacio y/o en el tiempo” (p.1) por otra parte según Borba (2011) “puede ser entendida como la modalidad de educación que acontece primordialmente mediada por interacciones vía internet y tecnologías asociadas” (p. 17). Desde estas perspectivas y, teniendo en cuenta el contexto del programa Ude@, la educación a distancia online puede entenderse como el proceso de interacción entre estudiantes y docentes, a través de diferentes interfaces tecnológicas y otros medios que permiten el diálogo, la comunicación y la producción de conocimiento.

Para la producción de conocimientos en la modalidad de educación a distancia online, es importante tener en cuenta algunos aspectos que influyen en la manera en que los estudiantes y docentes interactúan para construir conocimientos, en nuestro caso los conocimientos matemáticos asociados al Teorema Fundamental del Cálculo. En este sentido, según Borba (2011), la interacción, el diálogo y la colaboración son factores que condicionan la naturaleza del aprendizaje y al mismo tiempo están directamente relacionados con el proceso de producción de conocimiento.

Para Borba (2011), el diálogo va mucho más allá de ser una simple conversación, es un medio de interacción donde los participantes expresan no sólo sus opiniones, sino también, sus experiencias, dudas y sentimientos. De esta manera, la comunicación entre docentes y estudiantes va mucho más allá de la transmisión de conocimiento y se convierte en un proceso de construcción colectiva posibilitando la transformación de experiencias y la producción colaborativa de conocimiento.

Reconociendo la importancia de la interacción, el diálogo y la colaboración como medios para la producción de conocimiento en la modalidad de educación a distancia online, el constructo teórico humans-with-media describe algunos aspectos que permiten caracterizar la manera en que un colectivo de seres humanos con medios produce conocimiento.

Constructo teórico humans-with-media

Investigadores en Educación Matemática han trabajado en las últimas décadas sobre la implementación de estrategias metodológicas para mejorar los procesos de construcción de conceptos y resolución de situaciones asociadas a las matemáticas. Al respecto, el constructo teórico humans-with-media, planteado por (BORBA; VILLAREAL, 2005) aborda el proceso de producción del conocimiento matemático a partir de la interacción realizada entre los seres humanos y los medios.

El constructo teórico propuesto por los docentes investigadores Marcelo C. Borba y Mónica Villareal (2005), nace de las reflexiones realizadas sobre la dicotomía que se presenta entre los humanos y la tecnología, y las consecuencias relevantes que se presentan en el aula de clase. El constructo teórico propone hablar de la tecnología como las herramientas en interacción con los seres humanos, de tal manera que no se contempla la posibilidad de pensarlas de forma independiente de los seres humanos, tal como lo ilustra la siguiente figura.

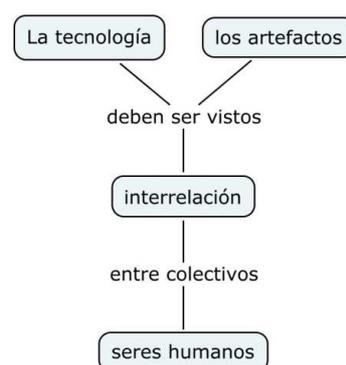


Figura 1: Mapa conceptual construido a partir de la interpretación del constructo teórico

Por otra parte, la construcción del conocimiento matemático está relacionada con la interacción de los humanos y los medios. Los primeros, tanto docentes como estudiantes, interactúan con el conocimiento para una reorganización del pensamiento y, al mismo tiempo, la producción del mismo; los segundos por su parte, pueden ser empleados para representar,

producir o comunicar ideas matemáticas y además condicionan y regulan el tipo de pensamiento a ser desarrollado y el tipo de matemáticas que van a ser construidas. Esto se ilustra en la figura 2.

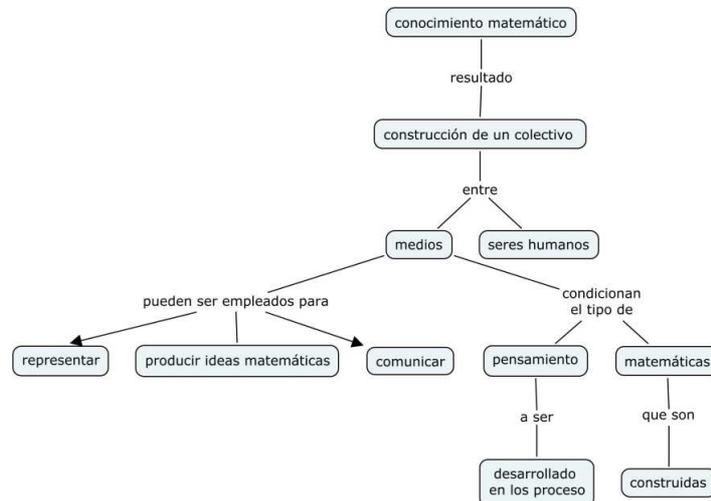


Figura 2: Mapa conceptual construido a partir de la interpretación del constructo teórico

Los autores reflexionan sobre la articulación de modelos, múltiples representaciones, la experimentación y la tecnología como una manera de construir conocimiento matemático (BORBA; VILLAREAL, 2005, p.65). En el texto se introduce la noción de la reorganización del pensamiento y la idea de que el conocimiento no es transmitido, es producido por la interacción de un colectivo de humanos–con–medios. En este sentido, por un lado se utilizarán los mapas conceptuales como una manera de reflejar los conocimientos matemáticos en construcción y las modificaciones que se realizan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y, por otro lado, se utilizará la entrevista de carácter socrático como medio para dinamizar el diálogo y la comunicación en esta modalidad.

El Teorema Fundamental del Cálculo

Una de las investigaciones recientes que aborda la relación inversa entre las cuadraturas y las rectas tangentes (LONDOÑO, 2011) y que utiliza la entrevista socrática para favorecer la comprensión de este conocimiento matemático, manifiesta que los orígenes del Cálculo se remontan unos 2000 años atrás, en los trabajos de los griegos sobre áreas y tangentes. Arquímedes (287-22 a.C.) halló el área de una sección de parábola, en términos actuales lo que significa calcular la expresión $\int_0^b x^2 dx$. Por su parte, Apolonio (alrededor de

260-200 a.c.) escribió acerca de tangentes a elipses, parábolas e hipérbolas, y Arquímedes analizó las tangentes a ciertas curvas en forma de espiral. En esta época no se tenía conocimiento de que los problemas de área y tangentes estarían relacionados muchos siglos después.

En el siglo XVII, mientras Descartes y Fermat desarrollaban muchas ideas en torno a la Geometría Analítica y el Álgebra, Cavalieri (1598-1647) halló el área bajo la curva $y = x^n$ para $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ de acuerdo a un método en el que la longitud de los cálculos aumentaba a medida que el exponente se hacía mayor. A partir del valor $n = 9$, aseguró que el patrón debería ser válido para exponentes mayores. En los siguientes 20 años, varios matemáticos justificaron su conjetura. De manera que, aún el cálculo del área bajo $y = x^n$ para n entero positivo n , que se toma como ejemplo, representa un gran triunfo. Más tarde, Wallis (1616-1703) halló el área bajo la curva $y = x^{2/3}$ por un método que tiene más carácter mágico que matemático. Sin embargo, Fermat obtuvo el mismo resultado con ayuda de series geométricas infinitas.

La situación era propicia para la unión de las técnicas acerca de tangentes y áreas. En efecto, Barrow (1630-1677), profesor de Newton en Cambridge, logró un resultado equivalente al Teorema Fundamental del Cálculo, aunque no expresado en forma útil, aspecto que se pretende ser retomado en el presente estudio.

En el cálculo, hay dos importantes clases de límites que se estudian, el primero se define como la derivada de una función:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Y el otro se define como la integral definida (PURCELL; VARBERG; RIGDON, 2007):

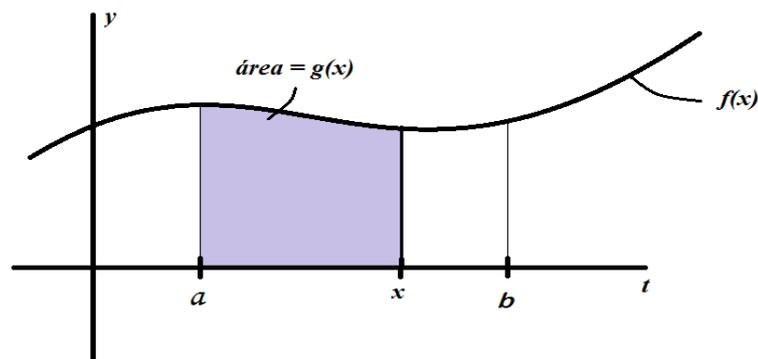
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Inicialmente, los matemáticos no habían encontrado una relación entre estos dos límites, sin embargo, la relación entre anti-derivadas e integrales definidas dio paso a la

denominación del primer teorema fundamental del cálculo, en la cual se construyen integrales indefinidas a partir de integrales definidas como lo planteó Isaac Barrow mucho antes que Leibiniz y Newton. Esta relación está dada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

En el programa Ude@, la construcción de este conocimiento matemático por parte de los estudiantes no es muy clara, algunos resuelven este tipo de situaciones de manera mecánica, sustituyendo las variables como indica el teorema no dejando ver, si establecen la relación entre estas rectas tangentes y las cuadraturas. Es decir, radica la dificultad en comprender la relación entre el área bajo la gráfica de una derivada en un intervalo y las pendientes en la respectiva anti-derivada, en otras palabras “la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior variable es el integrando evaluado en ese límite superior” (STEWART, 2008, p. 381), de manera gráfica podemos observar:



Donde $g(x)$ es el área bajo la curva definida entre $[a,x]$ es decir, $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ y $f(x)$ es la derivada de la función $g(x)$, ($g'(x) = f(x)$)

Por otra parte, se dificulta más aún entender cómo construyen el conocimiento relacionado con la derivada de una función de acumulación, esto es:

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(x) \cdot g'(x)$$

Este caso, será el objeto de estudio del presente trabajo de investigación en el cual se analizará la manera en que los estudiantes construyen este conocimiento matemático, teniendo

en cuenta la relación entre las rectas tangentes y las cuadraturas mediante la utilización de medios tecnológicos y no tecnológicos.

METODOLOGÍA

Retomando la idea de que el conocimiento no es transmitido sino producido por un colectivo de seres humanos con medios y, que esta producción está relacionada con la interpretación individual y la interacción social, en el diseño metodológico de la investigación se utilizaron los mapas conceptuales como medio para reflejar y modificar las interpretaciones individuales y, la entrevista de carácter socrático como medio para dinamizar el proceso de interacción social (el diálogo) entre el colectivo de seres humanos.

Mapas conceptuales

El uso de los mapas conceptuales en educación matemática ha sido implementado en algunas investigaciones (ZAPATA; SUCERQUIA, 2009) gracias a su doble intencionalidad, por un lado, facilitan la visualización de las transformaciones que el estudiante realiza en su estructura mental y, por otro lado, permite evaluar de manera significativa los aprendizajes que el estudiante ha alcanzado en la construcción del conocimiento matemático.

Los creadores de esta herramienta, Joseph Novak y Bob Gowin definen a los mapas conceptuales como “un recurso esquemático para la representación de un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones.” (NOVAK; GOWIN, 1988, p. 33) por otra parte, argumentan que su estructura se refiere a la ubicación y organización de las distintas partes de un todo, los conceptos más generales e inclusivos deben situarse en la parte superior y los más específicos y menos inclusivos en la parte inferior.

Una característica importante en los mapas conceptuales es que las palabras enlace permiten, junto con los conceptos, construir frases u oraciones con significado lógico y hallar la conexión entre conceptos, de esta manera se facilita la identificación de posibles obstáculos conceptuales que los aprendices tengan en el proceso de construcción de conocimiento.

En el proceso de elaboración de los mapas se desarrollan nuevas relaciones conceptuales, en especial si, de una manera activa, se construyen relaciones proposicionales entre conceptos que previamente no se consideraban relacionados. Además, permiten seleccionar, extraer y separar la información significativa o importante de la información superficial, facilitando la organización lógica y estructurada de los contenidos de aprendizaje y proporcionando un recurso esquemático de todo lo que se ha aprendido.

Dentro del proceso de interacción, es importante resaltar el lenguaje empleado y el diálogo generado en dicho proceso, de esta manera los mapas conceptuales serán un instrumento que evidencie el lenguaje y la manera como se exteriorizan estructuras conceptuales interpretadas por los estudiantes en relación al conocimiento matemático. Por otra parte, el refinamiento del mismo es una muestra del dominio que se puede tener del concepto en construcción y el aprendizaje colaborativo que se desarrolla en la modalidad online.

Por otra parte, Zulatto (2007) plantea que en la producción de conocimiento se considera que “el aprendizaje colaborativo online es el proceso en que alumnos, profesores y tecnología participan activamente e interactúan a distancia para producir significados colectivamente” (p. 70). Así mismo, el constructo teórico humans-with-media plantea que la interacción es orientada por los profesores, quienes a través de cuestionamientos llevan las discusiones con los estudiantes a percibir sus errores y construir nuevos significados y de esta manera producir nuevos conocimientos, aspecto donde los mapas conceptuales participan de manera directa. Por otra parte, se considera que la entrevista socrática aportará en el proceso de orientación de las discusiones y por lo tanto, en la producción de conocimientos matemáticos.

Entrevista de carácter socrático

Según De La Torre (2003) (citado por LONDOÑO, 2011, p. 38) “El propósito de Sócrates, tal como se perfila en los diálogos de Platón, es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, [...] no como un resultado de la enseñanza sino por la propia reflexión”. Así mismo, plantea que:

El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a desvelar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre.

Para el diseño y aplicación de la entrevista de carácter socrático, se tienen en cuenta las características enunciadas por Londoño (2011), en relación al diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón. Estas características han sido utilizadas en otras investigaciones (JURADO; LONDOÑO, 2005) y (Santa, 2011) para diseñar entrevistas de carácter socrático que ayuden a la comprensión de conocimientos matemáticos. A continuación se mencionan las 10 características:

- La intencionalidad de la entrevista
- El lenguaje
- Los conceptos básicos
- Las experiencias previas del entrevistado
- El diálogo inquisitivo
- La movilización del pensamiento
- El aporte de información
- La problematización con ideas
- El paso por los tres momentos
- La red conceptual

Según lo anterior, la entrevista socrática está basada en el diálogo que para la presente investigación se establece teniendo en cuenta la modalidad online. En este sentido, autores como Borba (2011), afirman que el diálogo es un medio que influye en la producción de conocimiento en la modalidad de educación a distancia online. De esta manera, la entrevista de carácter socrático es un instrumento que dadas sus características, puede permitir dicha interacción y diálogo.

Teniendo en cuenta estos planteamientos, la investigación utiliza una entrevista de carácter socrático, diseñada principalmente para que el colectivo de humanos-con-medios

interactúan, en la modalidad online, a través de un diálogo socrático en relación a los conocimientos matemáticos asociados al teorema fundamental del cálculo. Por otra parte, ayuda a caracterizar la manera en que este colectivo, producen los conocimientos.

La participación de los estudiantes en el curso, es esencial para poder vislumbrar los conocimientos y las relaciones significativas que se establecen a través del diálogo generado por la entrevista de carácter socrático. Por otra parte, teniendo en cuenta la doble intencionalidad de los mapas conceptuales, se utiliza como una manera de evidenciar las modificaciones que realizan los estudiantes en cuanto a la construcción del conocimiento asociado al teorema fundamental del cálculo.

Enfoque de la investigación

El estudio es abordado desde una perspectiva cualitativa, dado que se considera como la metodología más apropiada para la recolección de la información en lo que se refiere a la manera en que un colectivo de humanos-con-medios interactúan para la producción de conocimiento matemático asociado al teorema fundamental del cálculo. Este enfoque, se caracteriza por el análisis de los datos no estandarizados y los procedimientos involucrados en el proceso de aprendizaje utilizando las interfaces y los medios que participan para la producción de conocimiento.

El método utilizado para la investigación es el estudio de casos, ya que según (YIN, 2009) estudia el fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real en la que los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente visibles, y en la que se utilizan distintas fuentes como evidencia: observaciones, entrevistas, cuestionarios, entre otros. De esta manera y dadas las ventajas que ofrece para dilucidar comportamientos, actitudes y conocimientos que evidencian el avance en la comprensión de los entrevistados se considera el método más apropiado para describir la manera en que el colectivo de humanos-con-medios producen conocimientos matemáticos asociados al Teorema Fundamental del Cálculo.

Se seleccionó un grupo al azar del curso de Cálculo Integral del programa Ude@, donde se enseña el Teorema Fundamental del Cálculo. Allí se implementó un guión de entrevista (de carácter socrático) elaborado previamente, que permitiera el establecer un diálogo y, durante este proceso, los estudiantes construían el mapa conceptual que reflejaba

los conocimientos producidos. Al finalizar se analizan las grabaciones de las sesiones realizadas en la interface WiziQ y los mapas conceptuales entregados por los estudiantes para caracterizar la manera en que este colectivo de seres humanos producen conocimientos matemáticos asociados al Teorema Fundamental del Cálculo.

CONCLUSIONES

En la modalidad de educación a distancia online, el diálogo socrático y la interacción con los medios inciden en la manera en que los estudiantes producen conocimiento matemático. La entrevista de carácter socrático permite a través del diálogo, generar discusiones en las cuales los estudiantes del programa Ude@ construyen y modifican los conocimientos matemáticos que son abordados, en este estudio, en relación con el teorema fundamental del cálculo.

La implementación de los medios (entornos virtuales, software, entre otros) establecen una relación entre los conocimientos matemáticos, con sus componentes de visualización, las definiciones y aplicaciones que se tornan significativas con el trabajo colaborativo desarrollado, aspecto que se evidencia con la elaboración de los mapas conceptuales. A continuación se presenta dos imágenes de mapas conceptuales elaborados por un estudiante durante el proceso.

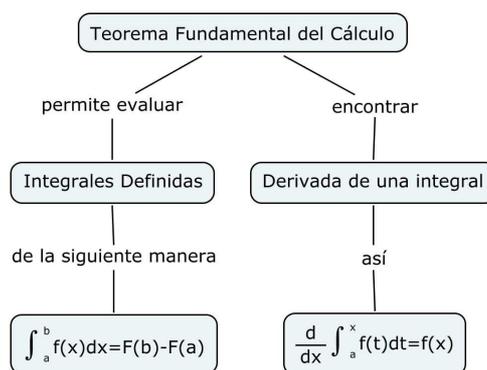


Figura 3: Mapa conceptual construido por un estudiante al inicio del proceso

En este mapa se interpreta que el estudiante comprende el teorema fundamental del cálculo como una manera de encontrar una solución algorítmica a ciertas situaciones planteadas en el cálculo.

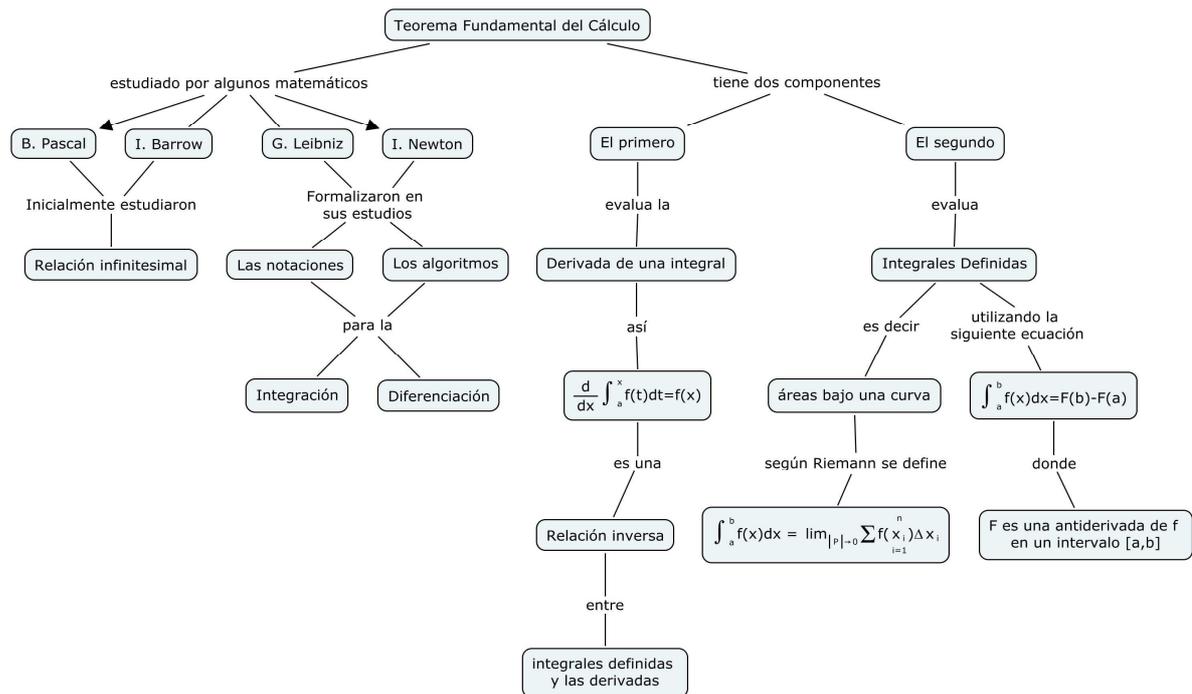


Figura 4: Mapa conceptual construido por un estudiante durante el proceso

En este segundo mapa conceptual, se interpreta que el estudiante amplía y asocia los conocimientos relacionados con el Teorema Fundamental del Cálculo, además establece nuevos significados en relación con los propuestos inicialmente generando relaciones significativas y evidenciando una producción de conocimiento.

El teorema fundamental del cálculo es un concepto matemático que está directamente relacionado con otros conocimientos donde se involucran procesos de razonamiento infinito. Esto propicia varias discusiones en relación a sus componentes de visualización, no partiendo desde las definiciones, sino desde las diferentes manifestaciones o representaciones del teorema y sus aplicaciones, permitiendo algunas reflexiones sobre la manera en que un colectivo de humanos-con-medios construyen este conocimiento matemático.

En general, en un ambiente de educación online como el programa Ude@, el uso de las interfaces mediante una metodología de interacción social y el proceso de interpretación individual de un colectivo pensante de seres humanos, permite la producción de conocimiento matemático en torno a los conceptos relacionados con el teorema fundamental del cálculo, siendo los mapas conceptuales y la entrevista de carácter socrático dos componentes esenciales usados en la metodología, que permiten dinamizar el proceso de producción de conocimiento.

BIBLIOGRAFÍA

- BARBOSA, S. *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia*. Tese de Doutorado. Rio Claro. Brasil, 2009.
- BARTOLINI, M.; BORBA, M. *The role of resources and technology in mathematics education*. ZDM- The international Journal on Mathematics Education. Springer. 2010.
- BORBA, M. et al. *Educação a Distância Online*. Coleção Tendências em educação Matemática. Autêntica Editora LTDA. 3 Edição. Belo Horizonte. Brasil. 2011.
- BORBA, M. *Online mathematics teacher education: overview of an emergent field on research*. ZDM- The international Journal on Mathematics Education. Springer. 697-704. 2012.
- BORBA, M.; VILLAREAL, M. *Humans -with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York, USA: Springer. 2005.
- DUARTE, J. et al. A internet no ensino e aprendizagem da matemática. p. 357-366, 2008. Disponível em : http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2008/2008_27_JDuarte.pdf ultimo acceso: Febrero de 2013
- JARAMILLO, C.; LONDOÑO, R.; JURADO, F. *Una metodología alternativa para la comprensión de la noción de límite: El caso de la convergencia de series de términos positivos*. España. Editorial Académica Española. 2012.
- JURADO, F.; LONDOÑO, R. *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. Tesis de Maestría no publicada, Medellín, Colombia. 2005.
- LONDOÑO, R. A. *La Relación Inversa entre Cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Medellín: Tesis Doctoral. 2011.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Lineamientos curriculares. Santafé de Bogotá. Colombia. 1999.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Educación virtual o educación en línea*. 2009. Artículo publicado en: <http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-196492.html>. Acceso Febrero de 2013.
- MORAN, J. M. *O que é educação a distância*. 2002. <http://www.eca.usp.br/moran/dist.htm> Acceso Abril 22 de 2013.
- NOVAK, J. D.; & GOWIN, B. *Aprendiendo a aprender*. Tercera Edición. Barcelona: Martínez Roca. 1988.
- PURCELL, E. J; VARBERG, D.; RIGDON, S. E. *Cálculo*. 9 Ed. Person. Ciudad de México. 2007.
- SANTA, Z. *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van hiele*. Tesis de Maestría no publicada, Medellín, Colombia. 2011.
- STEWART, J. *Cálculo de una variable*. 6 ed. Cengage learning. México. 2008.
- YIN, R. *Case study research, Design and methods*. California: Sage Publications, Inc. 2009.

- ZAPATA, S. M.; SUCERQUIA, E. A. *Módulos de aprendizaje para la comprensión del concepto de series de términos positivos*. Tesis de maestría no publicada. Medellín, Colombia. 2009.
- ZULATTO, R. *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores*. Tese de Doutorado. Rio Claro. Brasil. 2007.