A RESOLUÇÃO DE APLICAÇÕES DE INTEGRAIS A PARTIR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Lucia Menoncini[1]

Méricles Thadeu Moretti[2]

Educação Matemática no Ensino Superior

RESUMO

O Cálculo Diferencial e Integral é um dos componentes curriculares do ensino superior, cuja presença e importância se justificam pela contribuição à instrumentalização da formação científica matemática. Neste trabalho investigamos como estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática resolvem aplicações da Integral Definida, voltadas ao cálculo de áreas de regiões planas delimitadas por curvas de funções, a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval. A resolução de tais aplicações requer a mobilização de diferentes registros de representação semiótica (em língua natural, algébrica, gráfica e figural) e por esta razão, a conversão entre estes registros precisa ser explorada de modo que sejam percebidas e compreendidas as articulações existentes entre as representações. De acordo com Duval, a espontaneidade e a rapidez com que os estudantes efetuam as conversões conduzirão à coordenação dos registros de representação, que por sua vez conduzirá à compreensão (integral) de um conteúdo conceitual. Embasados na Engenharia Didática de Artigue organizamos uma sequência didática que possibilite ao estudante realizar conversões dos registros e em duplo sentido, tendo o software GeoGebra como ferramenta dinâmica para a visualização da figura limitada pelas curvas.

PALAVRAS CHAVES: Integral Definida. Cálculo de Área. Registro de Representação Semiótica.

INTRODUÇÃO

O Cálculo é um dos componentes curriculares do ensino superior de grande importância para a instrumentalização da formação científica matemática dos estudantes. Mais que um conjunto de conceitos, de teoremas e de aplicações, é uma gama de conhecimentos que auxiliam na compreensão de fenômenos e na resolução de problemas reais que estão ao nosso entorno.

Apesar da importância do Cálculo para a formação dos estudantes, muitas vezes ele fica ofuscado pelas dificuldades de aprendizagem que lhe são inerentes.

---

[1] Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – PPGECT- DINTER-UFSC/UFFS. Bolsista do Programa UNIEDU UNIEDU. Apoio CAPES. Professora da UFFS. E-mail:lucia.menoncini@uffs.edu.br

[2] Doutor em Didática da Matemática/ULP. Professor permanente do PPGECT/UFSC. E-mail: mthmoretti@gmail.com

Estas dificuldades têm causado um fenômeno conhecido como ‘represamento’, que ocorre pela reprovação em massa, pela evasão e pela desistência por parte dos estudantes e afeta não somente os professores que ministram a disciplina e quem a frequenta, mas a comunidade acadêmica de modo geral.

Discutir o processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo tem sido um caminho para compreender melhor este fenômeno. Trabalhos que versam sobre Cálculo vêm sendo desenvolvidos ao longo dos anos e sob diferentes perspectivas, como: os que investigam as potencialidades e os limites das Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC’s no ensino de Cálculo (VILLARREAL, 1999; OLÍMPIO, 2006; BARBOSA, 2009) e em particular Olímpio (2006) tem mostrado que as dificuldades de aprendizagem do Cálculo, retratadas pelo baixo índice de aprovação dos alunos e aliado ao índice de evasão, não é um fenômeno exclusivo de uma universidade, seja pública ou não, seja nacional ou internacional; os que utilizam mapas conceituais como sinalizador de aprendizagem (FERRÃO, 2013; CARGNIN, 2013); os que utilizam a Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o estudo de derivadas e integrais (GODOY,2004; PICONE, 2007) ou que utilizam a referida Teoria para o estudo de conceitos que são fundamentais para o Cálculo como o esboço de curvas de funções (SILVA, 2008; LUIZ, 2010; MENONCINI e MORETTI, 2017).

Estudos também têm mostrado a crescente inserção das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação - TDIC no ensino de Cálculo em universidades e seus efeitos positivos na aprendizagem. A utilização destas ferramentas em práticas educativas para a produção de conhecimentos é defendida por Borba e Penteado (2010, p. 45) que destacam que “[...] uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento.”

Nessa perspectiva, as TDIC complementam os instrumentos educacionais já existentes (papel, lápis, calculadora,...) resultando numa nova forma de produção de conhecimento embasada nas experimentações, verificações e refutações de hipóteses.

> Da mesma forma, devemos entender a informática. Ela é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às

> outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma "nova linguagem" que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. (BORBA E PENTEADO, 2010, p. 48)

O uso do computador em sala de aula permite observar detalhes de imagens visuais que possivelmente sem o uso desta ferramenta, passariam despercebidos. Além de favorecer a visualização, especialmente dos detalhes, pode-se experimentar, confrontar, validar ou descartar hipóteses relacionadas ao problema estudado, de forma a fortalecer as discussões que culminarão na construção do conhecimento.

Esta ferramenta tecnológica ganha espaço entre os profissionais da matemática e é considerada um importante recurso para visualização gráfica, que complementa e dá significado às representações algébrica e numérica. Programas computacionais como o Maple, o Derive e o Geogebra permitem a construção, a visualização e a análise dinâmica de gráficos, além de possibilitar uma melhor articulação entre os registros gráfico e algébrico.

A articulação entre múltiplos registros de representação é uma atividade defendida por Raymond Duval em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Nela, a mudança de registros (registro é um sistema semiótico que possibilita a execução das operações cognitivas de formação, tratamento e conversão) é pressuposto para descrever o funcionamento cognitivo do pensamento matemático, caracterizando uma forte ligação entre a *noesis* (apreensão conceitual de um objeto) e a *semiosis* (apreensão ou produção de uma representação semiótica).

A teoria de Duval (1995) confere às múltiplas representações semióticas um papel fundamental à aprendizagem matemática, pois os objetos matemáticos não são reais e só temos acesso a eles por meio de representações. Como um mesmo objeto pode ser representado de formas diferentes, esta variedade de representações deve conduzir o estudante a distinguir o objeto de sua representação, contribuindo para a apreensão conceitual.

Embasado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e voltado ao ensino de Cálculo, propomos um outro olhar às aplicações da Integral Definida. Assim como os conceitos teóricos do Cálculo, as aplicações são igualmente importantes pois evidenciam onde as teorias estudadas estão presentes no cotidiano e como é possível emprega-las para resolver problemas. Mais especificamente, as aplicações da Integral Definida que tratam do cálculo de áreas de figuras delimitadas por curvas possibilitam ampliar os estudos introduzidos pela Geometria Euclidiana e servem para resolver problemas do mundo real, como por exemplo, o cálculo da área de um terreno 'retangular' em que um dos lados está delimitado por um rio, ou mesmo, o cálculo da área de uma região elíptica.

Problemas sobre cálculo de áreas via integrais mobilizam diferentes registros de representação semiótica e a passagem de um registro a outro requer a realização e a exploração da conversão, que é uma operação cognitiva não neutra e fundamental para a compreensão conceitual, de acordo com Duval (1995). Desta forma, o olhar diferenciado que propomos toma como referência as conversões para possibilitar ao estudante uma visão mais ampla e interpretativa das representações envolvidas, especialmente a representação da região plana de integração, oriunda do registro gráfico-geométrico. Desta forma, a resolução de tais problemas não se resume à aplicação de fórmulas matemáticas que envolvem integral definida, mas à compreensão do processo de resolução como um todo.

Tendo como base metodológica a Engenharia Didática de Artigue (1996) organizamos uma sequência didática que será aplicada em 2018 a estudantes do ensino superior de uma universidade pública. Esta sequência será embasada em tratamentos e conversões e contará com o apoio computacional do GeoGebra, que proporcionará a exploração dinâmica da visualização gráfico-geométrica, contribuindo para o levantamento de hipóteses, conjecturas e refutações que culminarão na produção de conhecimentos.

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E AS CONVERSÕES

As representações semióticas são representações que estão relacionadas a sistemas particulares de signos, como a língua natural, a escrita algébrica, as figuras geométricas. Os sistemas semióticos permitem a transformação de representações e são essas transformações que atribuem à atividade matemática o poder ilimitado de exploração que conduz a novos conhecimentos (DUVAL, 2015). Mais, um sistema semiótico pode cumprir três operações cognitivas inerentes a qualquer representação:

a) **A formação de uma representação semiótica identificável:** constitui um conjunto de marcas que, embasado num sistema semiótico, identifica uma representação de algo.
b) **O tratamento** é uma atividade interna a um sistema semiótico e consiste na transformação de uma representação em outra, obedecendo as regras próprias do sistema.
c) **A conversão** ocorre entre registros. A representação de um objeto pertencente a um dado registro é transformada em outra representação pertencente a outro registro. A conversão modifica a forma de representar um determinado objeto.

Quando um sistema semiótico cumpre estas operações cognitivas é chamado **registro de representação semiótica**. Estas operações possibilitam reconhecer um objeto matemático e explorar esse objeto a partir de transformações da sua representação.

Segundo Duval (1995) os registros podem ser classificados em: das línguas, gráfico e figural. O registro das línguas é formado pela língua natural e pela língua formal ou algébrica. Este registro permite desenvolver não somente a comunicação, mas operações que estão associadas às funções discursivas e que são essenciais para a construção de conhecimentos. O registro gráfico compreende as representações de funções que são construídas no plano cartesiano enquanto que o registro figural contempla as representações das figuras geométricas.

A transformação que acontece entre registros, chamada conversão, não pode ser equiparada a uma atividade de codificação ou de interpretação:

> **Bem que a atividade cognitiva de conversão de uma representação possa, muitas vezes, parecer ser estreitamente ligada a uma interpretação ou a um código, ela lhe é irredutível, porque, por um lado, ela não se funda sobre alguma analogia, como no caso da interpretação e, por outro lado, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação** (DUVAL, 2012 c, p. 273, grifos do autor)

A conversão é uma operação não neutra e produtora de conhecimentos. Converter uma representação em outra pode produzir novas significações relativas ao objeto representado, implicando em novos conhecimentos. Ela está associada à coordenação dos registros, que por sua vez está associada à compreensão da matemática. Por isso, Duval (2012 c, p. 282, grifos nosso) enuncia sua ***hipótese fundamental***, em que ***"a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão".***

A conversão está longe de ser natural e imediata para o estudante e por esta razão precisa ser trabalhada no ensino. A importância desta operação cognitiva se justifica por permitir o trânsito entre registros e possibilitar o estabelecimento de correspondências entre eles.

Quanto às possibilidades de trânsito entre registros, Duval (2004) apresenta uma classificação dos sistemas semióticos, de acordo com a Tabela 1:

Tabela 1: os múltiplos registros e representações

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS PLURIFUNCIONAIS (os tratamentos **não são algoritmizáveis**)	**Célula 11** Língua natural: associações verbais (conceituais);descrição, definição, explicação; Raciocínio: argumento a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas	**Célula 12** Figuras geométricas planas ou em perspectiva (configurações de formas nas dimensões 0, 1, 2, 3); Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos; modelização de estruturas físicas (ex. cristais, moléculas...)
REGISTROS MONOFUNCIONAIS (os tratamentos são principalmente **algoritmizáveis**)	**Célula 21** Sistema de escrita: - numéricas (binária, decimal, fracionária...); - algébricas; - simbólicas (línguas	**Célula 22** Gráficos cartesianos (visualização de variações) mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

	formais); Cálculo literal, algébrico, formal...	

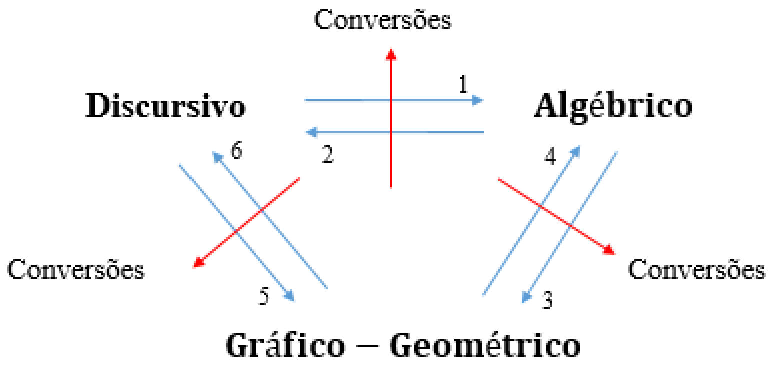
Fonte: Adaptado de Duval (2004, p. 52)

Analisando a Tabela 1, desenvolver a conversão entre os registros gráfico e algébrico implica transitar entre as células 21 e 22. A conversão em sentido duplo (de 21 para 22 e de 22 para 21) é pouco contemplada no ensino de matemática, apesar de ser fundamental para a aprendizagem de conceitos matemáticos, de acordo com Duval (2004). É habitual no ensino praticar a conversão em sentido único, da expressão algébrica (21) para a representação gráfica (22), dando a impressão de haver certa relação de dependência entre as representações, como se a segunda estivesse condicionada à primeira. As razões que levam à priorizar esse sentido de conversão estão atreladas à dificuldade da análise simultânea das propriedades visuais e algébricas das funções, visto que a maioria das funções possuem alto grau de complexidade.

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA: CÁLCULO DE ÁREAS

A resolução de aplicações da integral definida que tratam do cálculo de área de regiões planas limitadas por curvas de funções requer a mobilização dos diferentes registros de representação semiótica: de língua natural, algébrico, o gráfico-geométrico. O trânsito entre os registros ocorre por meio de conversões, as quais devem ocorrer em duplo sentido (Figura 1) para que haja a coordenação dos registros e consequentemente a compreensão integral de um conteúdo, como afirma Duval (1995).

Figura 1: Conversões requeridas em aplicações da integral definida



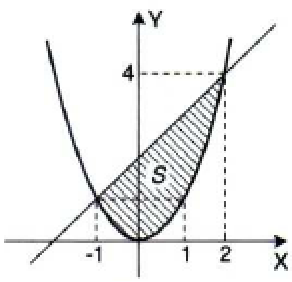
Fonte: Elaborado pelos autores

As setas vermelhas indicam a ocorrência de conversões e as setas azuis, o seu sentido. Destas seis conversões possíveis, a mais frequente é aquela que parte do registro discursivo para o algébrico, como pode ser observado no Exemplo 1 apresentado por Flemming e Gonçalves (2007, p. 275).

Exemplo 1: *Encontre a área limitada por* $y = x^2$ *e* $y = x + 2$.

Para resolver este problema as autoras inicialmente apresentam a Figura 2, resultante do esboço das curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Figura 2: Região plana delimitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

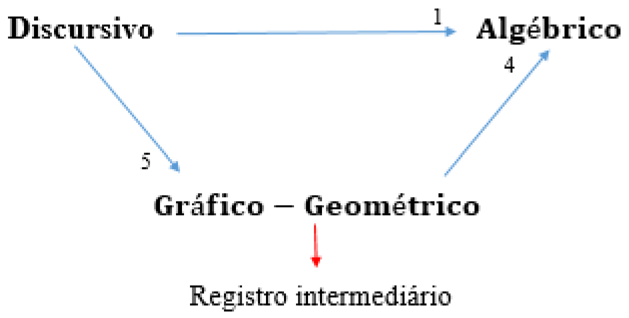


Em seguida destacam a região *rachurada* S e com base nela constatam que os pontos de intersecção das curvas têm abscissa -1 e 2 e portanto, que o intervalo de integração é [-1,2]. Afirmam que as funções são positivas e que $x + 2 \geq x^2$, em [-1,2]. Por fim, encontram o valor da área da região plana por meio da integral definida:

$$A = \int_{-1}^{2}(x + 2 - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}u.a$$

O procedimento de resolução usado pelas autoras parte do enunciado, que está representado no registro discursivo e chega a uma integral definida que está no registro algébrico, ou seja, a resolução está baseada na conversão em sentido 1 (Figura 1). Esta conversão não acontece diretamente, pois a integral requer o intervalo de integração e a função integrando, os quais são oriundos do esboço de curvas e da identificação da região de integração. A região de integração, representada no registro gráfico-geométrico é construída com base no discurso o que significa que há necessidade da conversão no sentido 5. Determinada a região de integração e reconhecidos o intervalo de integração e a função integrando, a passagem destas informações para o registro algébrico implica em outra conversão, desta vez, no sentido 4. Portanto, a resolução deste problema está atrelada às conversões nos sentidos 4 e 5. Mais, o registro gráfico-geométrico é utilizado como registro intermediário entre o discursivo e o algébrico.

Figura 3: O registro intermediário

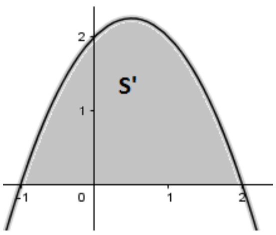


Fonte: Elaborado pelos autores

Observando este exemplo é possível destacar três pontos importantes que fortalecem a proposição deste trabalho: as conversões são executadas em apenas alguns sentidos; o registro gráfico-geométrico serve exclusivamente como intermediário para a passagem da conversão do registro em língua natural para o algébrico; o integrando, resultado da subtração de funções algébricas, não é explorado em nenhum registro. Assim, pretende-se organizar e aplicar uma sequência didática que possibilite: a realização de conversões em duplo sentido; tratar o registro gráfico-geométrico como registro de partida ou de chegada; a exploração das propriedades da função integrando, a partir da equivalência de áreas.

Voltando ao Exemplo 1, as autoras optam por aplicar a propriedade da integral definida $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$, desenvolvendo apenas a integral $A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, cujo integrando é a função $h(x) = (x + 2) - (x^2)$. Esta nova função $h(x)$, que possui propriedades distintas das suas funções componentes $f(x)$ e $g(x)$, é utilizada para calcular a área da região S, mas não é explorada em nenhum registro. Ao representá-la no registro gráfico se obtém uma outra curva e uma outra região plana que se diferem das curvas $y = x^2$ *e* $y = x + 2$ e da região S anteriormente encontrada, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Região equivalente S’



Fonte: Elaborado pelos autores

Surge um indagação:

Que relações há entre a região S e a região S’?

Pela propriedade da integral definida$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - gxdx$ a diferença das integrais é igual a integral da diferença e portanto, as regiões S e S’ são equivalentes entre si, possuindo a mesma área.

O Exemplo 1 é típico e recorrente em livros textos de Cálculo. A maneira de apresentar tais aplicações e o procedimento utilizado por Flemming e Gonçalves (2007) para a resolução é também compartilhado por outros autores, o que justifica a escolha pelo referido exemplo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As aplicações da integral definida que envolvem o cálculo de área mobilizam diferentes registros de representação semiótica que por sua vez, requerem a realização de conversões. A maneira como as aplicações são apresentadas determina não apenas as conversões necessárias para a resolução do problema, mas também o sentido destas conversões. Por esta razão, diversificar a maneira como elas são apresentadas, ou seja, diversificar o registro de partida das aplicações, possibilita a realização de conversões em duplo sentido. Sabendo que a espontaneidade das conversões conduz à coordenação dos registros de representação semiótica e esta conduz à compreensão integral de um conceito, como afirma Duval (1995), efetuar conversões em duplo sentido é de suma importância para a aprendizagem da Matemática, e em particular, do Cálculo.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.

BARBOSA, S M. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia.** 2009. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2009.

BORBA, M de C; PENTEADO, M G. **Informática e educação matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Coleção tendências em educação matemática; 2)

DUVAL, R.. **Semiosis y pensamento humano:** Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Tradução: Myriam Vega Restrepo. Cali, Colombia: Universidade del Valle, 1995.

_________**.** Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030!Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Revemat.** Florianópolis, v.10, n. 1, p. 1-23, 2015.

__________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Revemat.** Florianópolis, v. 7, n 2, p.266-297, 2012 c.

_________. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Tradução de Myrian V. Restrepo. Cali: Universidad e del Valle: 2004.

FERRÃO, H. S. **Mapas conceituais digitais como elemento sinalizador de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limites, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 2007.

GARGNIN, C. **Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas.** 2013. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2013.

GODOY, L. F. S. **Registros de representação da noção de derivadas e o processo de aprendizagem.** 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

LUIZ, L. dos S. **Esboço de curvas no ensino superior:** uma proposta baseada na interpretação global das propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

MENONCINI, L. MORETTI, M. T. A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. **Educação Matemática em Revista – RS**. V.1, n 18, 2017.

OLÍMPIO, A. Jr. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática:** uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. 264 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

PICONE, D. F.B. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SILVA, M. O. **Esboço de curvas:** uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1999.