RECORTE DA OBRA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E TRANSFORMADAS DE LAPLACE – UMA ANÁLISE DA METODOLOGIA DE UM PROBLEMA

Júlio Paulo Cabral dos Reis[1]
João Bosco Laudares[2]
Saulo Furletti[3]

- Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Neste relato de experiência apresentamos recortes de uma metodologia inovadora para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, a partir da introdução de Resolução de Problemas privilegiando diversas representações de modelos. É um material didático endereçado aos alunos, especialmente, dos cursos das ciências exatas, que possuem em seus currículos a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. A produção do material que foi utilizado na edição de um livro é resultado de experiências didáticas e pesquisas no Ensino de Cálculo e na Educação Matemática. A estrutura do artigo contém breve aporte referencial e um exemplo da Resolução de Problema como é tratada no referido livro.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Metodologia. Equações Diferenciais.

Introdução

Neste Relato de Experiência apresentamos recortes de um livro editado, para o conteúdo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Transformadas de Laplace. O livro é resultado da prática educativa e de pesquisas dos autores. Sugere-se, um aporte metodológico inovador que privilegia as metodologias da: Resolução de Problemas de Polya (1994), as representações semióticas de Duval (1996), a perspectiva metodológica denominada Modelagem Matemática de Bassanezi (1994) e a diversificação de representações de objetos matemáticos: verbal, gráfica, algébrica e numérica, segundo Stewart (2013).

A obra, de um primeiro curso de Equações Diferenciais Ordinárias, para o ensino superior, foi edificada a partir de dois grandes aportes teóricos:

(1) abordagem operacional do cálculo da solução de uma EDO;

(2) abordagem pela resolução de problemas geométricos na intramatemática e, de fenômenos físicos da intermatemática ou intercedências.

---

[1] Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. PUC Minas. julio.cabral.reis@hotmail.com
[2] Doutor em Filosofia. PUC Minas. jblaudares@terra.com.br
[3] Doutorando em Educação. IFMG - Campus Ribeirão das Neves. saulofurletti@gmail.com

O livro publicado, Laudares *et al* (2017), defende a abordagem metodológica diversificada para o ensino e aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. Assim, apresentamos um exemplo de resolução de problema utilizando a metodologia criada para o livro.

Metodologia e estrutura do Livro

A metodologia criada para o livro foi baseada nas Metodologias: Resolução de Problemas de Polya (1994) e Modelagem Matemática de Bassanezi (1994). Na proposta de ensino e aprendizagem para Cálculo Diferencial e Integral de Stewart (2013) e na Teoria das Representações Semióticas de Duval (1996). Esta forma de abordagem recebe o nome de Metodologia de Passos e possui um *design* próprio que foi utilizado em todos os problemas de fenômenos físicos, presentes no livro.

Segundo Stewart (2013) e Duval (1996) o aprendizado em Matemática, acontece ou é potencializado quando se utiliza as variadas representações e que quando o estudante é capaz de trabalhar com pelo menos duas representações para um mesmo objeto matemático, deste modo o conhecimento matemático, se dá de forma significativa. Assim, esta metodologia tende a inovar, e traz diferenciadas representações, para a solução de um mesmo problema.

Abordar um problema por meio de passos permite que o estudante possa fazer uma análise (estudo em partes) da situação e assim facilitar a sua compreensão e elaborar em linguagem natural uma síntese (estudo global) para verificar a aprendizagem.

O esboço do *design* da Metodologia de passos é apresentado no quadro 1:

Quadro 1 – Metodologia de passos

Enunciado – Problema o qual se pretende resolver. Questões – As quais serão analisadas durante o processo.

Fonte: Laudares et al. (2017)

Assim, a Metodologia de passos, segue oito passos para focar em uma aprendizagem significativa:

Interpretação do enunciado – Compreende-se aqui o enunciado na linguagem natural.

1º Passo: Matematização da lei física – Busca-se compreender o enunciado e as questões propostas, por um modelo que auxilie na resolução do problema dado e a linguagem algébrica é instaurada;

2º Passo: Constantes dadas – Substituição na equação do fenômeno – Elabora-se uma linguagem algébrica a fim de passar da linguagem natural para a linguagem algébrica;

3º Passo: Condições iniciais ou de contorno – Retiradas do enunciado;

4º Passo: Resolução da Equação Diferencial do modelo – Buscam-se métodos da disciplina de EDO para resolver o modelo;

5º Passo: Cálculos solicitados nos problemas: explicitar o que se pede – Técnicas de manipulações algébricas;

6º Passo: Modelo das equações do fenômeno – Representação algébrica do fenômeno;

7º Passo: Modelo dos gráficos do fenômeno – Representação figural do fenômeno;

8º Passo: Descrição sintética do fenômeno num pequeno texto – Compreensão de todo o contexto na linguagem verbal ou descritiva, a partir, da análise das representações anteriores e Cálculos realizados;

Cabe ressaltar que Matematizar, para Laudares *et al* (2017), é fazer uma análise da situação problemática e expressar matematicamente o problema, o qual se encontra no fenômeno em estudo. O que se configura dentro da visão de Modelagem Matemática apresentada por Bassanezi (1988). A matematização, apoiada pela informática, tem conquistado um espaço de destaque, pois pode facilitar os cálculos operacionais e permitir mais tempo de análise reflexiva para interpretação das propriedades e das caraterísticas dos processos.

Ao observar um fenômeno, em seu processo de variação, procedemos uma medição que requer uma analítica com instrumentação para aferir e tratar as informações com variáveis, com parâmetros, com sistema de unidades e escalas. Traduzir este processo inerente ao fenômeno em uma linguagem simbólica específica, numa tentativa de sintetizar características de sua dimensão, constitui o ato de matematizar o fenômeno, ou seja, a ação de matematização.

Durante os oito passos proposto nota-se a preocupação, de que o estudante perpasse por pelo menos duas representações do mesmo fenômeno, presente no problema. Pode-se passar por até mais representações, pois Duval (2003) diz que “a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro” (p.21), e que a compreensão se dá, quando o estudante é capaz, para um mesmo objeto matemático, registrá-lo e/ou representa-lo, de pelo menos duas formas diferentes. Logo, na metodologia de passos, há a preocupação de trabalhar com variadas representações, e refleti-las modo a construir o aprendizado.

O processo de passos também auxilia nas representações sugeridas por Stewart (2013), uma vez que, o aluno perpassa pela linguagem natural, linguagem algébrica, representações gráficas, representações figurais e retorna a linguagem natural (verbal/descritiva) para validar as compreensões durante o processo. A este respeito Stewart (2013) diz que só é capaz de compreender que é capaz de verbalizar. Assim, a metodologia busca a compreensão do aluno, em uma amplitude, que forneça além de uma aprendizagem significativa a autonomia.

Os próprios passos se configuram em propostas da Resolução de Problemas de Polya (1994), pois é um processo dinâmico e não linear, onde o estudante pode avançar e retroceder nos passos conforme compreenda a necessidade dos mesmos, afim de obter uma resposta condizente para o problema. Quanto melhor a compreensão maior será a autonomia, permitindo inclusive, investigações.

Mostra-se, nas linhas seguintes, como um problema pode ser resolvido sob a luz da metodologia de passos. O problema é retirado do livro publicado, Laudares *et al* (2017), e segue resolvido.

Tema: Decaimento exponencial

Problema de decomposição do elemento radium

Problema de Valor Inicial – PVI e Problema de Valor de Contorno – PVC

Quadro 2 – Enunciado do problema

ENUNCIADO
Dados (I) O elemento químico “radium” se decompõe naturalmente em proporção direta à quantidade presente; (II) Leva 250 anos para decompor 10% de uma certa quantidade de radium; **Questões –** Compreendendo o problema (III) Determine a massa do radium em função do tempo

(IV) Determine em quantos anos será decomposta metade da quantidade inicial do radium (V) Determine os modelos de equações do fenômeno (VI) Esboce os gráficos das equações (VII) Descreva num pequeno texto o fenômeno comparando os gráficos e as equações

Fonte: Laudares et al. (2017)

Interpretação do Enunciado (Quadro 2):

Os passos da resolução do problema estão de acordo com os itens do enunciado

1º Passo: Matematização da Lei Física. (Buscando um Modelo – Configurando a linguagem algébrica – Compreendendo o problema).

Identificação das variáveis: m - massa do radium; t – tempo; k - constante de proporcionalidade.

Interpretando o item I do enunciado, a lei física pode ser expressa, matematicamente, da seguinte forma:

$$\frac{dm}{dt} = km \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{dt}} - km = 0} \tag{1}$$

2º Passo: Modelos e significados das Equações:

(1) Velocidade de decomposição: $\frac{dm}{dt}$ em função da massa m.

(2) Velocidade de decomposição: $\frac{dm}{dt}$ em função do tempo t.

(3) A massa do elemento químico em função do tempo: $m = m(t)$

Obs.: É a solução da Equação Diferencial - Lei de decaimento exponencial.

3º Passo: Condições dadas

Condição inicial: $t = 0$ ano $\Rightarrow$ $\mathrm{m} = 1$(100%, total de massa presente no instante inicial).

Condição de contorno: t = 250 anos $\Rightarrow$m = 0,9 (90% de massa restante, 10% de decomposição).

Observação: m = massa em quilograma.

4º Passo: Determinação da massa em função do tempo – (Utilizando um método para resolução).

Teremos a solução da Equação Diferencial, a qual representa a velocidade de decomposição, com a aplicação das condições dadas. Utilizando o método de separação de variáveis:

$$s.v. \quad \frac{dm}{dt} = km \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}} = k\,dt$$

Integrando $\Rightarrow \quad \int \frac{dm}{m} \quad = \quad \int kdt$

Temos: $\log_e m = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad m = e^{kt+c_1} \;\Rightarrow\; m = e^{kt}\;\mathrm{e}^{c_1}$, fazendo $\mathrm{e}^{c_1} = c$

Fazendo $\mathrm{e}^{c_1} = c$ temos:

$$\boxed{m = ce^{kt}} \tag{2}$$

A determinação <u>*c*</u> e <u>*k*</u> se faz, aplicando as condições dadas:

$$\begin{cases} t = 0 \\ m = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 1 = c\,\mathrm{e}^{k\;0} \quad \therefore \quad \mathrm{c} = 1$$

Portanto, $m = 1\mathrm{e}^{k\;t}$ ou $m = \mathrm{e}^{k\;t}$

$$\begin{cases} t = 250 \\ m = 0{,}9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0{,}9 = \mathrm{e}^{250k}$$

ou $k = \dfrac{\log_e 0{,}9}{250} = -4{,}21 \cdot 10^{-4} = -0{,}000421$,

Finalmente:

$$\boxed{m = e^{-0{,}000421t}} \tag{3}$$

Esta é a expressão que dá m em função de t.

5º Passo: Cálculo da meia-vida (Resolvendo a questão diretriz do problema)

Cálculo do tempo (t em anos) para decomposição da metade da massa. Substituir $m = \frac{1}{2}$ na equação da massa em função do tempo: $m = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{-0{,}000421t}$, Aplicando logaritmo e isolando t, temos: $t \approx 1646{,}43$ anos.

6º Passo: Equações definidoras do fenômeno – (Representação Algébrica do Fenômeno).

(1) Velocidade de decomposição da massa em função da massa m

Levando o valor de “k” na equação da decomposição, teremos:

$$\frac{dm}{dt} = km \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dm}{dt} = -0{,}000421\ m} \qquad (4)$$

(2) Velocidade de decomposição da massa em função do tempo.

Derivar a equação de “m” em função de “t”:

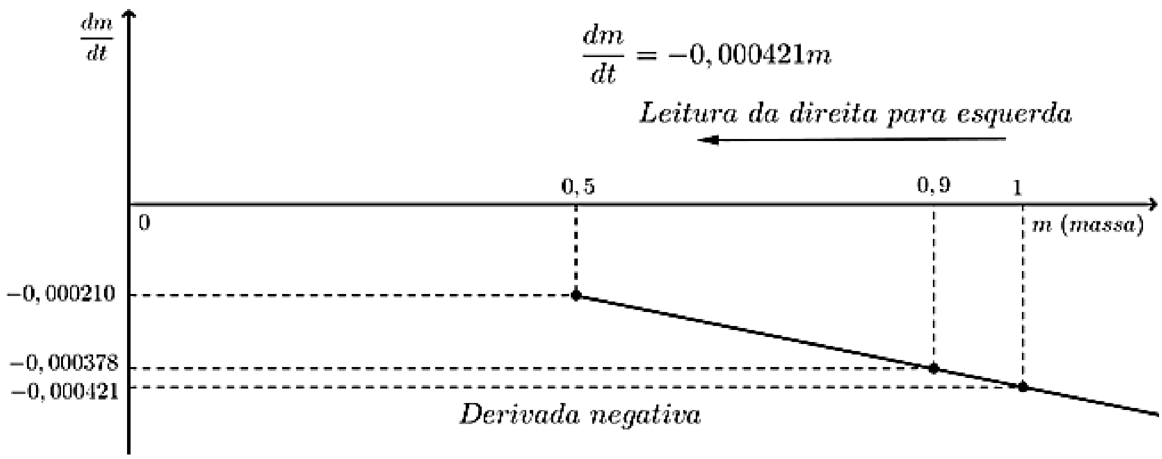
$$m = e^{-0{,}000421t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dm}{dt} = -0{,}000421\ e^{-0{,}000421t}} \qquad (5)$$

(3) Variação da massa em função do tempo.

Equação de *m* em função de t $\Rightarrow \boxed{m = e^{-0.000421t}}$ (6)

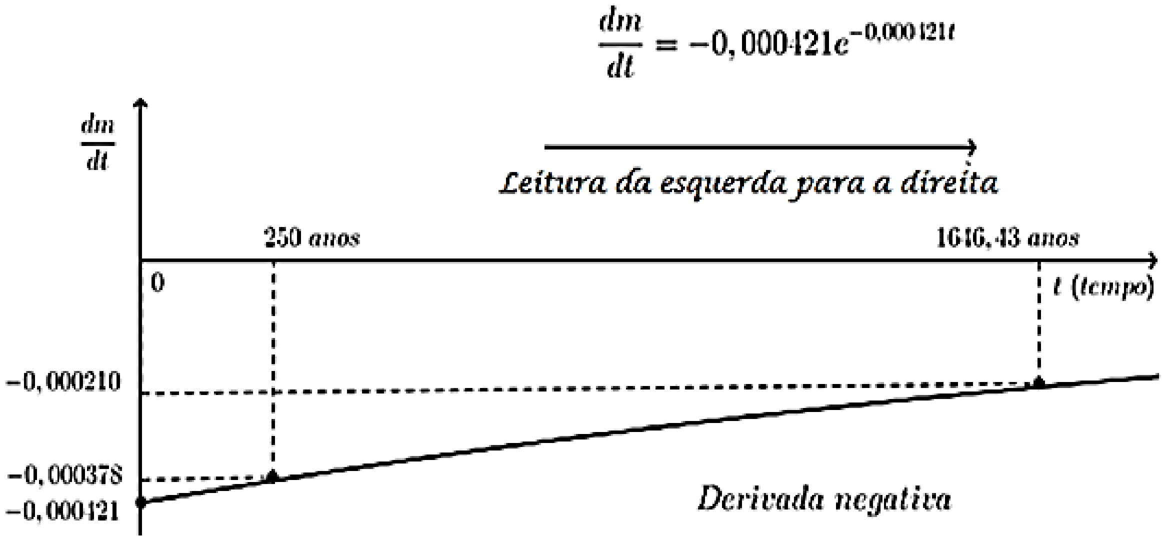
7º Passo: Esboçar os gráficos das equações. (Representação Figural do Fenômeno)

Gráfico 1 - Velocidade de decomposição da massa em função da massa (Eq. 4)



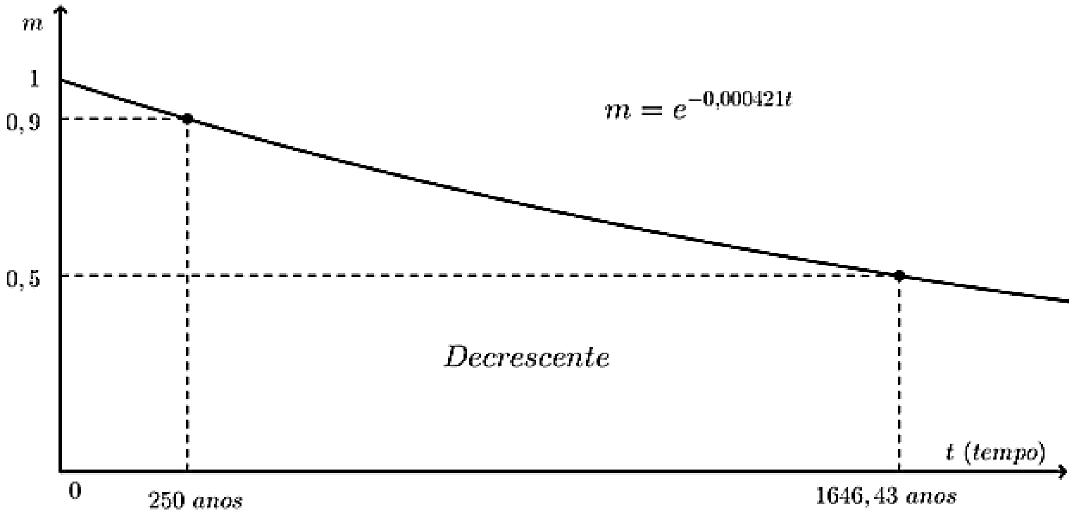
Fonte: Laudares et al. (2017)

Gráfico 2 - Velocidade de decomposição da massa em função do tempo (Eq. 5)



Fonte: Laudares et al. (2017)

Gráfico 3 - Variação da massa em função do tempo (Eq. 6)



Fonte: Laudares et al. (2017)

8º Passo: As respostas das seguintes questões dão suporte à compreensão do comportamento do fenômeno estudado.

Refletindo o Problema: (Aprendizagem Significativa – Verbal/Descritivo).

1) Porque o gráfico 1 $\frac{dm}{dt}$ é uma reta?

2) Quando o tempo cresce no gráfico 2 $\frac{dm}{dt}$, o que ocorre com a velocidade de decomposição?

3) Analise o gráfico 1 de $\frac{dm}{dt}$ e o gráfico 2 $\frac{dm}{dt}$ quanto à variação de sinal (positivo/negativo) e de valores. Obs: O sentido de leitura do gráfico 1 $\frac{dm}{dt}$ é da direita para esquerda, pois a massa inicial 1 (100%)

4) Dê o valor da velocidade de decomposição no tempo inicial no gráfico 1 $\frac{dm}{dt}$ e gráfico 2 $\frac{dm}{dt}$

5) Dê o comportamento da variação de massa em relação ao tempo, no gráfico 3, para um tempo crescente. Obs.: Variação do radium Crescimento/Decrescimento e variação da derivada positiva/negativa

6) Lendo os três gráficos, para $m = \frac{1}{2}\ kg$, verifique o tempo e a velocidade de decomposição.

7) Determine o valor mínimo da massa para um tempo crescente.

8) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto comparando os gráficos e as equações. (Linguagem Natural – Verba/Descritiva).

Considerações Finais

A partir da experiência dos autores na sala de aula e em pesquisas, molda-se uma proposta bibliográfica com características inovadoras para o conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias, partindo de uma sistematização metodológica por meio de uma sequência de passos, que lança mão de uma didática baseada na Resolução de Problemas e na diversificação de representações. Frente a esta forma de exploração de um problema, podemos traçar um cenário de escassez de referências que contemplam uma metodologia semelhante à presentada no livro.

Apontamos o posicionamento inovador na estruturação metodológica de abordagem do problema, com destaque ao *design* próprio que foi instituído para o estudante realizar a análise da situação problema para promover o desencadeamento do raciocínio, por meio do desenvolvimento de etapas.

O método de resolução por passos, não é limitado a memorização de algoritmos e processos, ele demanda a análise e interpretação dos fenômenos pelo estudo dos modelos que o definem em várias representações, especialmente a gráfica agregada a algébrica, pelas equações. Esta forma de abordagem pode trazer possibilidades para uma significativa contribuição no estudo de EDOs.

Assim, o conteúdo das EDOs e Transformadas de Laplace, integra-se a uma metodologia de estudo em todo Livro, que enseja uma ressignificação à procura de um percurso exploratório metodologicamente organizado em passos para compreensão do estudante.

Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. ***Equações diferenciais:* com aplicações**, 1988.

BASSANEZI, R.. **Modelagem Matemática:** uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. Blumenau: Dynamis, 1994.

DUVAL, R. **Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?** RDM, v 16, n3, p. 349-382. 1996.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas F.; REIS, Júlio Paulo Cabral; FURLETTI, Saulo. **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace**. Belo Horizonte: Artesã. 2017.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de janeiro: Interciência, 1994.

STEWART, James. **Cálculo**. V. 2. São Paulo: Pioneira Thonson Learning, 2013.