ANÁLISE GRÁFICA DO CONCEITO DE DERIVADA SEGUNDO OS PRESSUPOSTOS DA TEORIA APOS

Janice Rachelli[1]

Vanilde Bisognin[2]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Neste artigo, relata-se um estudo que tem por objetivo analisar como se dá a compreensão gráfica do conceito de derivada por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Tendo a teoria APOS como referencial teórico e metodológico, elaborou-se a decomposição genética, em que foram descritas as possíveis construções mentais utilizadas pelo estudante para a compreensão da derivada e, especialmente, sobre os conceitos e teorias presentes na análise gráfica de uma função e suas derivadas. Foram organizadas situações de ensino compostas por atividades em que os alunos devem relacionar a interpretação da derivada como inclinação da reta tangente e as características da derivada com propriedades da função como, por exemplo, a diferenciabilidade, a monotonicidade, a concavidade e máximos e mínimos. As situações de ensino foram desenvolvidas em sala de aula, tendo como base o ciclo de ensino ACE, com estudantes matriculados em uma disciplina que trata dos fundamentos do Cálculo. Os resultados obtidos, por meio dos registros dos alunos e das observações anotadas no diário de campo, indicam que os estudantes compreendem de forma satisfatória as informações presentes no gráfico da função e de suas derivadas primeira e segunda e coordenam essas informações relacionando-as com as características dessas derivadas. Além do mais, os alunos evidenciaram desenvolver mecanismos mentais de abstração reflexionante que possibilitaram a construção das estruturas mentais de ação, processo, objeto e esquema presentes na decomposição genética.

Palavras-chave: Função. Derivada. Análise gráfica. Teoria APOS.

Introdução

O conceito de derivada tem sua origem associada a problemas geométricos que envolvem a determinação de tangentes a uma curva. Euclides definiu a tangente a uma circunferência; Apolônio de Perga trabalhou o traçado de tangentes e normais às cônicas; Arquimedes se inspirou na cinemática para traçar a tangente a sua espiral. Porém foi com o surgimento da Geometria Analítica que o método de determinar tangentes pôde ser aplicado a qualquer curva. Destacam-se, neste estudo, por exemplo, o método de encontrar máximos e mínimos, pelo qual encontrava geometricamente os pontos em que a reta tangente ao gráfico da função tinha inclinação nula, de Fermat; o método de Barrow, que consistia na

---

[1] Doutoranda em Ensino de Matemática. Centro Universitário Franciscano/Universidade Federal de Santa Maria. janicerachelli@gmail.com

[2] Doutora em Matemática. Centro Universitário Franciscano. vanildebisognin@gmail.com

determinação do limite de uma corda com pontos que se aproximam entre si e o método de Newton, que utilizava as primeiras e últimas razões para a determinação da inclinação de uma curva. Todos esses métodos, juntamente com a teoria das fluxões de Newton e as diferenciais de Leibniz consistiram em problemas que geraram a formalização do conceito de derivada por meio do limite da razão incremental.

No estudo da derivada, além de compreender o conceito da derivada e de utilizar regras de derivação na resolução de problemas, é fundamental que o estudante compreenda a interpretação da derivada em gráficos para que, por meio das representações analítica e gráfica, possa interpretar e relacionar características da função com as suas derivadas. Informações sobre o crescimento e decrescimento de funções e a resolução de problemas de otimização podem ser obtidos por meio da utilização de propriedades das derivadas primeira e segunda e são úteis na análise do comportamento das funções.

Em relação ao conceito de derivada, pesquisas indicam evidências de que os alunos universitários apresentam dificuldades em relacionar as representações analítica e gráfica da derivada (ALMEIDA; VISEU, 2002; BISOGNIN; BISOGNIN, 2011). Nesses estudos, foram aplicados testes e/ou questionários a estudantes de graduação e de pós-graduação com o objetivo de averiguar as dificuldades dos alunos em interpretar e relacionar os gráficos de uma função e de suas derivadas. Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos, os pesquisadores sugerem que devam ser priorizadas práticas de ensino que integrem as abordagens gráficas e analíticas como forma de favorecer a compreensão da interpretação gráfica e da relação da função e suas derivadas.

Por outro lado, a utilização de enfoques teóricos, como por exemplo, a teoria APOS, que permite entender o processo de aprendizagem por meio das construções mentais desenvolvidas pelos estudantes, tem favorecido a compreensão gráfica de uma função e suas derivadas. O estudo desenvolvido por Asiala et al. (2001), com dois grupos de estudantes, mostra que os alunos que tiveram aulas tendo como base a análise teórica do modelo cognitivo APOS, obtiveram melhores resultados no entendimento gráfico da função e suas derivadas, que aqueles cujas aulas seguiram o método tradicional.

Acreditamos que o uso de teorias e metodologias diferenciadas em sala de aula, em que o aluno trabalha com os conceitos e resolve exercícios, tendo a possibilidade de reflexionar sobre suas ações e discuti-las, em um trabalho colaborativo com colegas e professores, propicia um ambiente favorável à compreensão de conceitos e teorias que estão sendo trabalhados sobre determinado conhecimento matemático.

Nesse sentido, o presente estudo, que é parte de uma pesquisa em andamento, tem como objetivo analisar como se dá a compreensão gráfica de uma função e suas derivadas por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática e utiliza o modelo cognitivo APOS para a elaboração e implementação de situações de ensino que permitem analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão da derivada como coeficiente angular da reta tangente, das condições de diferenciabilidade e das relações entre a função e suas derivadas primeira e segunda.

Referencial teórico

A teoria APOS, desenvolvida por Ed Dubinsky e seus colaboradores, é o referencial teórico utilizado na pesquisa. Esse modelo teórico vem sendo utilizado por pesquisadores como forma de conhecer as dificuldades dos alunos no que se refere aos conceitos matemáticos do ensino superior e analisar as construções mentais utilizadas na aprendizagem, além de propor atividades de ensino que contribuam para a compreensão dos conceitos. A denominação APOS se deve aos quatro componentes essenciais identificadas nos estudantes, quando da construção de um conceito matemático, a saber, Action, Process, Object e Schema.

A teoria APOS toma como ponto de partida as ideias de Piaget (1995) sobre a abstração reflexionante para descrever a construção de objetos mentais relacionados a objetos matemáticos específicos; têm como base os mecanismos mentais de interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade, que possibilitam a compreensão de um conceito matemático por meio da construção de estruturas mentais de ação, processo, objeto e esquema. Um esquema corresponde à totalidade de conhecimento que um indivíduo tem sobre um determinado conceito matemático. Assim, um indivíduo poderá ter, por exemplo, um esquema de gráfico, um esquema de função, um esquema de derivada. Os esquemas devem ser coordenados para formar estruturas que serão utilizadas na resolução de problemas matemáticos.

De acordo com Arnon et al. (2014), a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas.

Procedimentos metodológicos

Os participantes desta pesquisa são cinco estudantes de um curso de mestrado, de um programa de pós-graduação em ensino de ciências e matemática, de uma universidade brasileira, matriculados no segundo semestre de 2016, na disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral. Os alunos, que denominaremos por A1, A2, A3, A4 e A5, são licenciados em Matemática e cursaram na graduação disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

A metodologia utilizada no desenvolvimento desta pesquisa é de natureza qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), em que empregamos as três componentes da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (ARNON et al., 2014): Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise dos dados.

Na Análise teórica, elaboramos a decomposição genética do conceito de derivada, a qual descreve as estruturas e os mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender este conceito. Assim, tendo como base a compreensão matemática e as construções históricas do conceito de derivada, a teoria APOS, as pesquisas de Asiala et al. (2001), García, Gavilán e Llinares (2012) e Vega, Carrillo e Soto (2014) e livros didáticos de Cálculo, elaboramos a decomposição genética preliminar do conceito de derivada.

Ao iniciar os estudos, é desejável que o aluno tenha como pré-requisitos conhecimentos sobre o valor de uma função em um ponto, a representação gráfica de uma função no plano, as operações entre funções, a inclinação da reta que passa por dois pontos, a sua equação e a representação geométrica e a velocidade média de um objeto.

A construção do esquema da derivada se inicia a partir do esquema de função em que o estudante deve desenvolver ações de substituir os valores da função em pontos específicos, e calcular a variação da função e a razão das variações. Essas ações devem ser interiorizadas em um processo ao considerar o limite da razão incremental, para obter o conceito de derivada. Este processo deve ser coordenado para obter $f'(x)$, por meio do limite e encontrar a derivada de funções, utilizando regras de derivação.

Com a encapsulação deste processo, obtém-se a definição do objeto cognitivo – a derivada da função. O aluno deverá generalizar o conceito de derivada para qualquer função $y = f(x)$. Utilizando os pré-requisitos, o aluno deverá coordenar as diversas interpretações de $f'(x)$, como inclinação da reta tangente no ponto $(x, f(x))$, como velocidade instantânea no instante $\boldsymbol{x}$ ou como taxa instantânea de variação de f em x. O objeto função derivada pode ser entendido como uma classe de objetos constituída por todas as derivadas das funções em cada ponto do domínio. Nesses objetos, podem ser realizadas novas ações, como por exemplo, o cálculo da derivada segunda.

A construção do esquema da derivada se constitui na coleção de todas as ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente do indivíduo e que permitem a resolução de um problema, utilizando o conceito de derivada.

Assim, a interiorização das ações necessárias para entender o processo da derivada, a coordenação das diversas interpretações da derivada, a encapsulação do processo da derivada, a coordenação e a generalização do esquema da função com sua derivada, aplicando o esquema da derivada em contextos distintos, a reversibilidade do processo, em que, conhecendo as características do objeto derivada, é possível obter as propriedades da função (crescente, decrescente, concavidade, pontos de máximo e mínimo, etc.), são mecanismos mentais de abstração reflexionante indispensáveis para obter o esquema da derivada.

Salientamos que, apesar de descrevermos a construção para o esquema da derivada, iremos enfatizar, neste artigo, a relação entre os aspectos analíticos e gráficos da função e suas derivadas.

Na etapa de Planejamento e implementação, elaboramos dez situações de ensino, que foram desenvolvidas em sala de aula, seguindo como metodologia de ensino o ciclo de ensino ACE, que consiste em três componentes: (A) Atividades; (C) Discussão em classe e (E) Exercícios. Essas situações de ensino são compostas por questões que tratam de problemas históricos sobre a determinação de tangentes, da derivada como coeficiente angular da reta tangente, das condições de diferenciabilidade e das relações entre a função e suas derivadas primeira e segunda.

A coleta de dados se deu por meio do desenvolvimento das situações de ensino, em sala de aula, na disciplina de Fundamentos de Cálculo Diferencial e Integral, perfazendo, para o estudo da interpretação gráfica da função e suas derivadas, um total de seis horas/aula. A professora pesquisadora fornecia as explicações necessárias, discutindo conceitos e teoremas presentes no estudo da derivada de uma função, esclarecia dúvidas e formalizava os conceitos matemáticos necessários à compreensão da relação entre a interpretação gráfica e analítica da função e suas derivadas. As atividades foram desenvolvidas com os alunos dispostos em dois grupos, um com dois e outro com três alunos, ou ainda, no grupo como um todo, em que eles tiveram a oportunidade de discutir e reflexionar com os colegas e a professora pesquisadora para, a partir daí, resolver os exercícios propostos nas atividades, a fim de auxiliá-los no desenvolvimento das construções mentais sugeridas pela decomposição genética.

A análise dos dados foi realizada a partir dos registros dos alunos nas atividades propostas nas situações de ensino e das anotações no diário de campo, em que procuramos verificar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão gráfica da função e suas derivadas pelos estudantes.

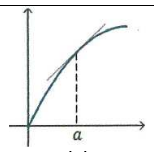
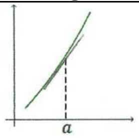
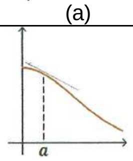
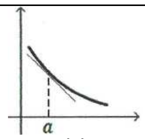
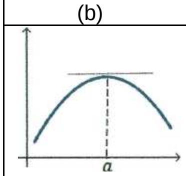
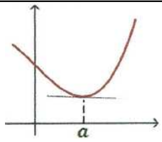
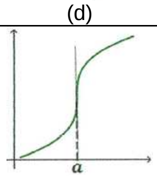
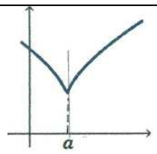
Análise dos dados e resultados

Apresentamos, a seguir, a análise dos dados referentes a quatro questões, que chamaremos de questões 1, 2, 3 e 4. Essas questões tratam da interpretação geométrica da derivada, das condições de diferenciabilidade e das relações analíticas e geométricas entre a função e suas derivadas primeira e segunda.

Na Questão 1, foram apresentados os gráficos de oito funções f e indicado em cada um dos gráficos o ponto a, conforme pode ser observado na Figura 1. Solicitava-se que os alunos indicassem, em cada caso, se a derivada $f'(a)$ é positiva, negativa, zero ou não existe, justificando.

Para responder à questão, todos os alunos coordenaram a representação gráfica da função com a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto a, representaram a reta tangente e indicaram corretamente onde a derivada $f'(a)$ é positiva (gráficos (a) e (c)), negativa (gráficos (b) e (g)), zero (gráficos (d) e (e)) e não existe (gráficos (f) e (h)). A Figura 1 mostra a representação das tangentes ao gráfico de f em a e as justificativas apresentadas pelo Aluno A5.

Figura 1 – Representação das tangentes ao gráfico da função f e justificativa feita pelo Aluno A5.

Gráficos e tangentes		Justificativa
 (a)	 (c)	"Derivada positiva, pois a reta tangente no ponto a tem inclinação positiva".
 (b)	 (g)	"Derivada negativa. A função é decrescente então a inclinação da reta é negativa".
 (d)	 (e)	"Derivada zero, com a inclinação da reta tangente igual a zero".
 (f)	 (h)	"Não possui derivada no ponto a". Em (f): "Não possui o coeficiente angular da tangente". Em (h): "A função apresenta um bico, então não tem coeficiente angular".

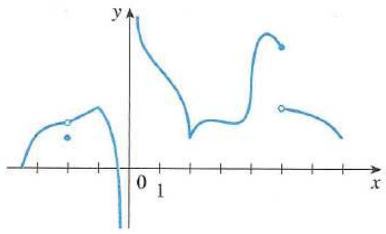
Fonte: Da autora e registro do Aluno A5.

O Aluno A5 e os demais alunos associaram os pontos onde a inclinação é positiva (reta tangente apontando para cima) com a derivada positiva, os pontos onde a inclinação é negativa (reta tangente apontando para baixo) com a derivada negativa, os pontos onde a inclinação é nula (reta tangente na horizontal) com a derivada igual a zero e, os pontos onde a reta tangente está na vertical ou não existe com pontos onde a derivada não existe. Isso mostra evidências de utilização do esquema da derivada para a coordenação da representação gráfica da função com propriedades da derivada primeira e também a coordenação da interpretação da derivada primeira com a inclinação da reta tangente.

Acreditamos que o fato de termos discutido, junto aos alunos, aspectos históricos que versam sobre o problema das tangentes e sobre a formalização do conceito de derivada, favoreceu o desenvolvimento de mecanismos mentais de coordenação que permitiu que todos os alunos respondessem corretamente a questão. Observou-se que todos os alunos realizaram ações em representar as retas tangentes aos gráficos das funções e por meio da interiorização coordenaram a inclinação da reta com o sinal da derivada primeira.

Na Questão 2, era dado o gráfico de uma função g (Figura 2) e perguntava-se: Em quais números g não é diferenciável? Por quê?

Figura 2 – Gráfico da função g.



Fonte: Stewart (2012), p. 175.

Ao responder à Questão 2, todos os alunos justificaram que a função g não é diferenciável em $x = -2$ e em $x = 5$, pois a função é descontínua e, em $x = -1$ e em $x = 2$, pelo gráfico da função "apresentar bicos" e "não possuir coeficiente angular" da reta tangente. Nenhum dos alunos mencionou que a reta tangente é vertical em $x = 4$ e que não existe $g'(4)$ e, portanto, que g também não é diferenciável em $x = 4$.

A definição formal de diferenciabilidade nos diz que: "Uma função f é diferenciável em a se $f'(a)$ existe" (STEWART, 2012). Em geral, se o gráfico de uma função f possui bicos, então seu gráfico não tem tangente no ponto (não existe o coeficiente angular da reta tangente) e f não é diferenciável neste ponto. O teorema: "Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a" (STEWART, 2012), mostra a relação entre as propriedades de diferenciabilidade e continuidade de uma função e nos informa que, se uma função não é contínua em a, então f não é diferenciável em a. Outra possibilidade da função não ser diferenciável em a, é a curva ter uma reta tangente vertical em $x = a$, ou seja, f é contínua em a e $\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$.

De acordo com as respostas dos alunos, observamos que eles utilizaram o fato da função ser descontínua e/ou de não possuir tangente nos pontos considerados para determinar onde a função não é diferenciável. Porém faltou a compreensão de que a função também não é diferenciável se possuir reta tangente vertical. Isso pode ser justificado pelo fato de que, na maioria das vezes em que a diferenciabilidade de funções é tratada em cursos na graduação, há ênfase nas duas primeiras possibilidades (descontinuidade e não possuir tangentes), conforme pode ser observado em exemplos e exercícios fornecidos por livros didáticos que carecem de problemas, embora tratem teoricamente da terceira possibilidade.

Salientamos que as três possibilidades foram apresentadas e discutidas com os alunos antes da resolução dos exercícios. De qualquer maneira, há evidências de que houve coordenação dos esquemas da interpretação geométrica da derivada com a diferenciabilidade de funções. Estes esquemas fazem parte do esquema da derivada. No entanto, observamos, nas respostas dos alunos, que há falta de utilização de uma linguagem mais apropriada para justificar suas respostas.

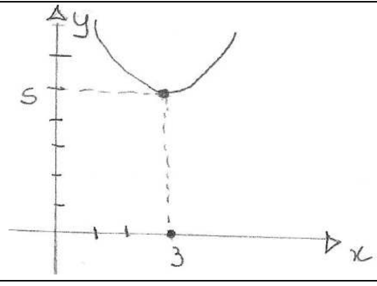
Na Questão 3, solicitava-se que fosse feito o esboço do gráfico de uma função contínua tal que $f(3) = 5$, $f'(3) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < 3$ e $f'(x) > 0$ para $x > 3$.

Das discussões feitas em sala de aula e das observações registradas no diário de campo, concluímos que todos os alunos levaram em conta as informações analíticas fornecidas pela questão e coordenaram as propriedades da derivada primeira com as características da função, tendo observado que:

- para $x = 3$ o valor de f é 5;
- $f'(x) < 0$ para $x < 3 \Rightarrow f$ decrescente para $x < 3$;
- $f'(x) > 0$ para $x > 3 \Rightarrow f$ crescente para $x > 3$;
- $f'(3) = 0$ e f' passa de negativa para positiva em $x = 3 \Rightarrow f$ tem um mínimo em $x = 3$.

Com isso, todos os alunos esboçaram corretamente o gráfico da função f, conforme pode ser observado na Figura 3, na resolução do Aluno A4.

Figura 3 – Resolução da Questão 3 pelo Aluno A4.



Fonte: Registro do Aluno A4.

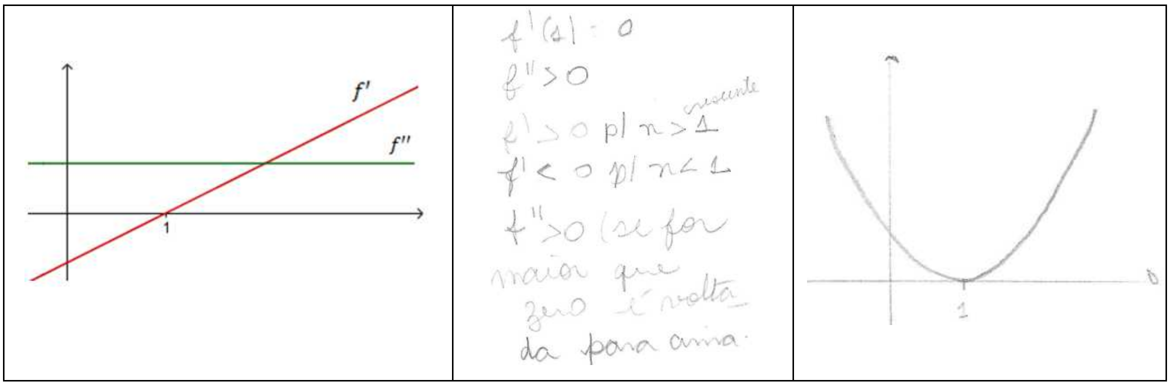
No esboço feito pelo aluno, evidenciamos a coordenação das informações analíticas da função e sua derivada primeira com as características da função e sua representação geométrica, além de ter utilizado o mecanismo mental de reversibilidade para, a partir das propriedades da derivada primeira, obter características da função.

A Questão 4 apresentava os gráficos das derivadas primeira e segunda de uma função f, conforme pode ser visto na Figura 4 e solicitava que fosse feito um esboço do gráfico de f.

Para a resolução da questão, é necessário que o aluno obtenha informações das derivadas primeira e segunda fornecidas pelos gráficos e coordene essas informações com as propriedades que relacionem a função com suas derivadas:

- $f'(1) = 0$, o que indica que 1 é ponto crítico de f;
- f' passa de negativa para positiva em 1, então $f(1)$ é mínimo local de f;
- $f'(x) < 0$ para $x < 1$, então f é decrescente para $x < 1$;
- $f'(x) > 0$ para $x > 1$ então f é crescente para $x > 1$;
- $f''(x) > 0$ para todo x, então o gráfico de f é côncavo para cima para todo x.

Figura 4 – Gráfico de f e f' da Questão 4 e resolução feita pelo Aluno A1.



Fonte: Da autora e registro do Aluno A1.

Todos os estudantes mostraram evidências de coordenar a maioria destas características, tendo obtido os dados dos gráficos por meio de ações e processos que, ao serem interiorizados, permitiram a obtenção das propriedades da função, tendo como referência os teoremas que fazem parte do esquema da derivada, os quais foram discutidos com os alunos antes da realização da atividade.

A Figura 4 ilustra essa questão, mostrando que o Aluno A1 revela ser capaz de analisar o sinal da derivada primeira para identificar os intervalos em que a função é crescente e decrescente e o sinal da derivada segunda, para obter a concavidade do gráfico da função. Embora o aluno não faça referência ao mínimo local de f (apenas escreve em sua resolução “$f'(1) = 0$”), esta informação foi inserida corretamente no gráfico.

Salientamos que, embora a função f poderia assumir qualquer valor em $x = 1$, verificamos que, assim como o Aluno A1, todos os demais alunos esboçaram o gráfico de f considerando $f(1) = 0$. Acreditamos que esse resultado deve ter sido influenciado pelo fato de que $f'(1) = 0$ e, mesmo que todos tenham esboçado o gráfico corretamente, faltou uma maior reflexão sobre esses dados.

As questões 3 e 4 envolvem mecanismos mentais de coordenação, generalização e reversibilidade, em que, conhecendo informações sobre as derivadas f' e/ou f'', o aluno deve reflexionar sobre estas informações e obter dados sobre o monotonicidade, concavidade, máximos e mínimos para fazer o esboço do gráfico de f. Embora sem justificar de forma coerente todas as informações, a resolução feita por cada um dos alunos nos dá evidências de que eles utilizaram estes mecanismos para um esboço correto do gráfico da função.

Considerações finais

Apresentamos aqui resultados de uma pesquisa em que foi utilizada a teoria APOS como aporte teórico e metodológico. O estudo desenvolvido com os estudantes não teve como foco uma simples prova ou avaliação de seus conhecimentos, mas sim, um trabalho colaborativo com vistas a auxiliá-los na construção e compreensão de conhecimentos que estão associados ao conceito de derivada.

Os resultados obtidos, nas quatro questões discutidas neste artigo, indicam que os alunos utilizaram mecanismos mentais de abstração reflexionante indicados na decomposição genética da derivada, que permitiram, com o uso do esquema da derivada, a resolução das questões de forma satisfatória e que evidenciam a compreensão gráfica da função e suas derivadas pelos estudantes.

Além disso, a metodologia de ensino utilizada, tendo como base o ciclo de ensino ACE, possibilitou o desenvolvimento de atividades que iniciaram com os problemas históricos que deram origem ao conceito da derivada e a resolução de exercícios com o acompanhamento da professora pesquisadora e discussões em grupo. Também, favoreceu a compreensão sobre a interpretação geométrica da derivada, as condições de diferenciabilidade e as relações entre a função e suas derivadas pelos estudantes.

Referências

ALMEIDA, C.; VISEU, F. Interpretação gráfica das derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**, Portugal, 15(1), p. 193-219, 2002.

ARNON, I. et al. **APOS Theory**: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York: Springer, 2014.

ASIALA, M. et al. The development of students' graphical understanding of the derivative. **Research in Collegiate Mathematics Education**, p. 1-37, 2001. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/SlopeStudy.pdf.> Acesso em: 5 mar. 2016.

BISOGNIN. E.; BISOGNIN, V. Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo (SP), v. 13, n. 3, p. 509-526, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto, 1994.

GARCÍA, M.; GAVILÁN, J. M.; LLINARES, S. Perspectiva de la práctica del professor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del professor. **Enseñanza de las Ciencias**, n. 30.3, p. 219-236, 2012.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante:** relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

STEWART, J. **Calculus**. 7. ed. Belmont: Brooks/Cole, 2012.

VEGA, M. A.; CARRILLO, J.; SOTO, J. Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p.403-429, 2014.