



## VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA

ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil.

04, 05, 06 e 07 de outubro de 2017

### ESTUDO DO CICLO TRIGONOMÉTRICO E DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICA POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Neílson Ferreira de Lima<sup>1</sup>

#### Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

**Resumo:** Uma das consequências do advento da computação e das linguagens de programação foi o avanço em tecnologias de comunicação e ensino. Graças a computação, há muitas e diferentes ferramentas que auxiliam o ensino de matemática nos diferentes níveis e modalidades do ensino. Professores têm feito uso destes recursos didáticos para dinamizar suas aulas e melhorar o aprendizado dos seus alunos, porém há docentes que ainda estão alheios a tal realidade e continuam usando o livro didático como ferramenta única para o ensino de matemática. Um dos resultados desta alienação das ferramentas computacionais é o não avançar na dinâmica do próprio ensino, por isso se faz necessário que os docentes saiam de sua zona de conforto e busquem o aprendizado de novas técnicas de ensino a fim de melhorar suas aulas, e seus educandos terem melhores rendimentos no aprendizado. Por essas e outras razões, propomos um minicurso com o uso do *software Geogebra* para um estudo do ciclo trigonométrico e das funções periódicas seno, cosseno, tangente e suas inversas. Será abordado a redução ao primeiro quadrante dos senos e cossenos; o conceito do seno e cosseno de um arco na circunferência com raio diferente de 1, isto é, menor que 1 e maior que 1. E uma análise do domínio, imagem, periodicidade das funções tipo seno, cosseno, tangente e suas inversas a partir dos gráficos construído com o *Geogebra*.

**Palavras Chaves:** *Geogebra*. Ciclo trigonométrico. Professores. *Software*. Funções.

#### INTRODUÇÃO

Ser didático não é uma tarefa fácil, porque requer tempo, esforço, conhecimento, dedicação, sabedoria e inteligência. Ser didático ou um didata significa ser dinâmico, eficiente e eficaz naquilo que faz e desenvolve (ESPITIA *et al*, 2011), (LOPES, 2007). Mais do que transmitir conhecimento, ser didático é levar os educandos ao aprendizado e reflexão do objeto de saber a ensinar.

Por carência dessas habilidades didáticas muitos docentes deixam a “desejar” em suas aulas, tornando a matemática como uma ciência acessível a poucos. Ser didático é uma das necessidades dos professores para tornarem suas aulas atraentes e com um melhor rendimento (NETO *et al*, 2017). Estou ciente que não basta ser didático, não estou considerando isto como a condição suficiente do aprendizado, mas

---

<sup>1</sup> Doutor. IFRN. E-mail: neilson.lima@ifrn.edu.br

afirmando que é importante ser uma didata, porque a responsabilidade do aprendizado não é apenas do professor, mas de um conjunto de acontecimentos, depende, também, de um conjunto multidimensional de variáveis ocorrendo simultaneamente ou em sequências.

Se formos investigar as possíveis causas do não aprendizado do educando, chegaríamos a conclusão que é tão complexo, mas tão complexo ... que tal pesquisa chegaria a resultados inéditos, dignos de uma tese de doutorado. E as hipóteses e conclusões das causas do não aprendizado de um discente não seria, necessariamente, as causas do não aprendizado do outro educando. Portanto, isto torna mais ainda complexo as investigações do aprendizado dos alunos, pois isso é muito relativo; tão relativo quanto os diferentes fusos horários existentes no mundo todo.

Côncios da complexidade de ensinar, os docentes têm buscado dinamizar suas aulas com o uso de recursos didáticos computacionais, a fim de um melhor aprendizado de seus educandos (DA COSTA *et al.*, 2017). Não são poucos os *softwares* disponíveis para o uso em sala de aula, desde os *softwares* livres (os gratuitos) como Régua e compasso, *Geogebra*, *Scilab* até os comerciais (pagos) como *MatLab*, *Cabri*, *Maple*, *Mathematica*, entre outros.

Neste minicurso, temos o objetivo de apresentarmos mais alguns recursos do *Geogebra* a fim de compartilharmos a ferramenta da trigonometria no ciclo trigonométrico e a construção e análise gráfica das funções periódicas senos, cossenos, tangente e suas inversas.

Pretendemos discutir alguns obstáculos didáticos em relação ao ensino do seno e cosseno de um arco no ciclo trigonométrico, bem como obstáculos epistemológicos abordados nos livros didáticos em relação ao seno e ao cosseno de um ângulo.

## **REVISÃO DE LITERATURA**

Professores de diferentes níveis e modalidade de ensino buscam ferramentas que possibilitem aulas diferenciadas afim de um melhor aprendizado de seus discentes (DOS SANTOS *et al.*, 2017). Entre as ferramentas destacam-se os *softwares* de geometria, álgebra, funções, recreativos, etc. De fato, o número de professores que despertam por uma melhor situação didática, vem aumentando, afim de envolver o aluno com o objeto do saber, apesar de sua maioria em absoluta, ainda

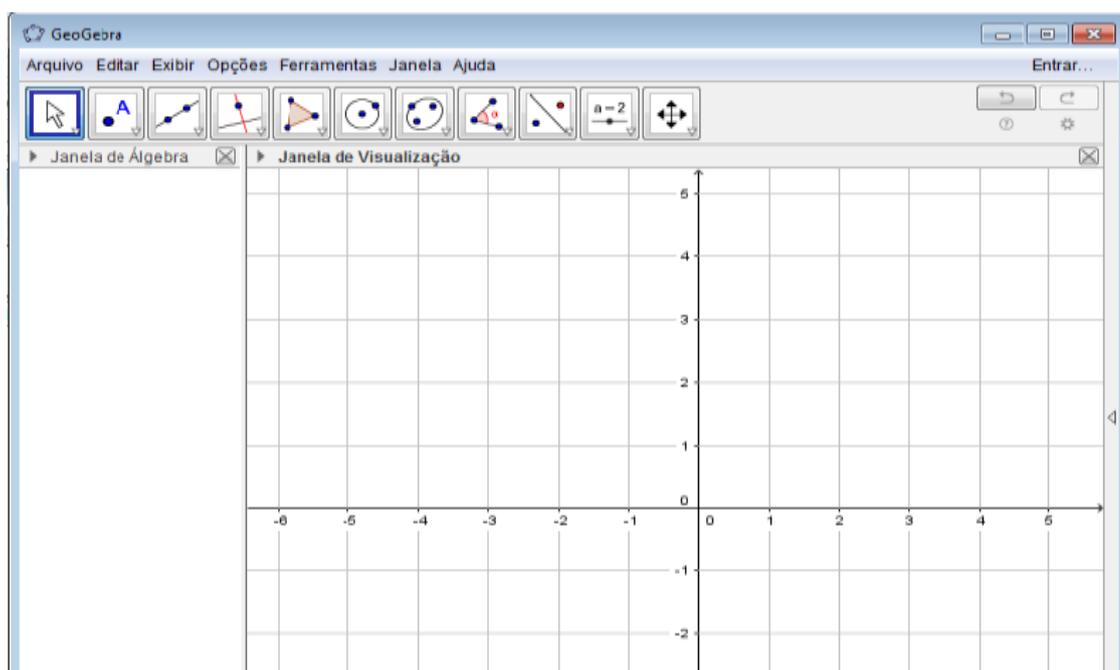
estarem “imerso” nas aulas expositivas com quadro branco ou negro e sem utilizar recurso computacionais para dinamizar sua aula.

Há muitos *softwares* de ensino de matemática, gratuitos/livres ou pagos/comercial que são utilizados pelos docentes em suas aulas de matemática. Há os *softwares* de álgebra – *winmat* – Geometria dinâmica – *cabri-geometry*, *cinderella*, *curve expert*, *dr geo*, *euklid*, *geometria descritiva*, *geoplan*, *geospace*, *great stella*, *poly*, *régua e compasso*, *shapari*, *sketchpad*, *s-logo*, *winggeom* – Funções – *graphequation*, *graphmatica*, *mathgv*, *modellus*, *ratos*, *vrum – vrum* e *winplot* – Recreativos – *oog- object orientation game*, *polytris*, *tangram*, *tess*, *torre de hanoi* e *winarc* (EDUMATEC, 2008). Ainda podemos destacar o *software Geogebra* que envolve álgebra, geometria, funções e estatística.

O *Geogebra*, uma mistura de geometria e álgebra, é um *software* de ensino dinâmico da matemática – álgebra, geometria plana, analítica e espacial, cálculo numérico, funções, cálculo de limites, derivadas e integrais, planilha de cálculo, probabilidade e estatística. Este *software* é distribuído gratuitamente para *Tablets* (Windows, *Ipad* e *Android*), *Desktops* (*Chrome*, *Windows*, *Mac* e *Linux*) e *Phone* (*Android*) no seguinte endereço <https://www.Geogebra.org/download>.

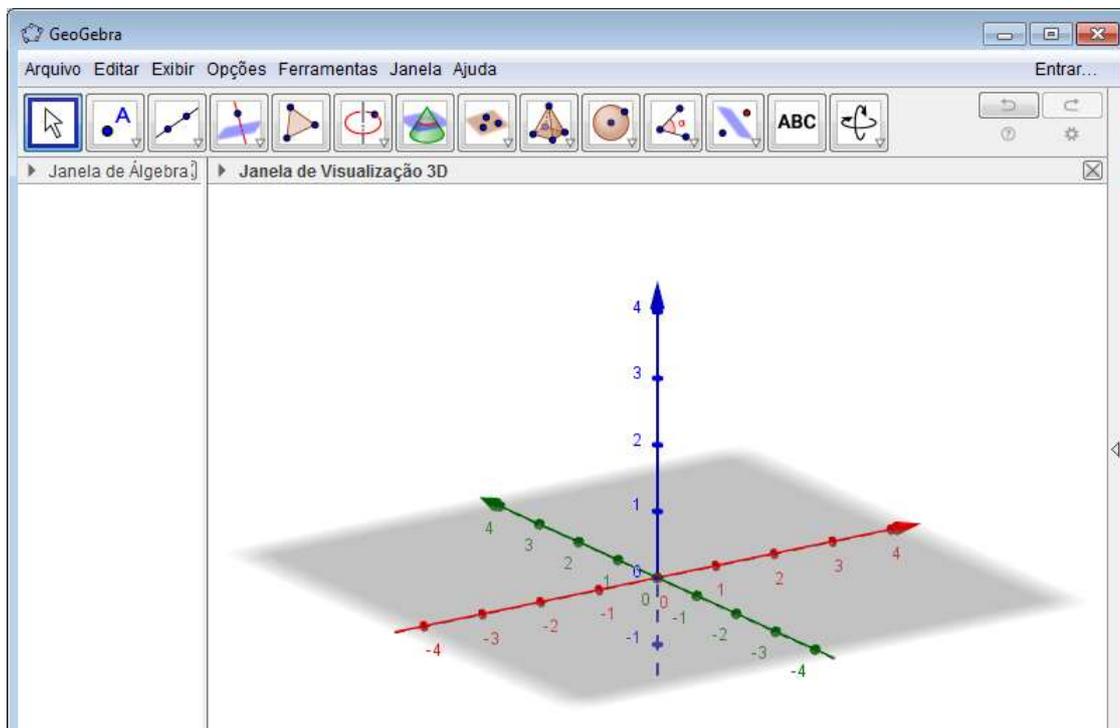
Markus Hohenwarter, em sua pesquisa de doutorado, desenvolveu o aplicativo *Geogebra* a fim de apoiar o ensino de matemática nos diferentes níveis escolares e acadêmico (ZILKHA, 2014), (Bezerra, 2013), (Cordeiro, 2014). De fato, o objetivo de Markus tem sido alcançado, porque professores e alunos em sua maioria que tem acesso e utilizam o *software Geogebra* se apaixonam pelo programa. Sua interface é amigável e é muito fácil de encontrar os botões e ferramentas de manipulação do programa ( Figuras 1 e 2). O *Geogebra* permite uma flexibilidade enorme no uso de equações, funções, modelos de probabilidade, figuras geométricas planas e espaciais; facilitando, assim, o entendimento e aprendizado por parte dos docentes e discentes.

Figura 1: Janela de visualização 2D do software Geogebra 5.0.



Fonte: Autor.

Figura 2: Janela de Visualização 3D do software Geogebra 5.0



Fonte: Autor.

O conhecimento do *software Geogebra* e sua aceitação tem aumentado no meio acadêmico, graduandos de cursos de matemática, física, etc. tem contato logo

no início de seus cursos com o brilhante *Geogebra*. Alunos do nível médio, também tem utilizado esta ferramenta em laboratórios para estudos de polinômios, geometria plana e espacial, trigonometria e funções trigonométricas, entre outros. Ainda, vamos mais longe, tenho um filho de 4 anos de idade que está na educação infantil e, desde os três anos de idade, ele ama usar o *Geogebra* para construir polígonos (triângulos, retângulos, quadrados, etc.).

Segundo Zilkha (2014, p. 11) “ Sua popularidade tem crescido continuamente e hoje o *Geogebra* é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, com mais de 300.000 downloads mensais. ”

#### Sobre o *Geogebra*:

Foram criados institutos regionais, que são membros do IGI (International *Geogebra* Institutes), cujo propósito é agregar interessados no uso do *Geogebra* como ferramenta de ensino e aprendizagem, criando uma comunidade aberta que compartilhe seus conhecimentos no treinamento, suporte e desenvolvimento de materiais de apoio para alunos e professores, promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores, com o objetivo de desenvolver materiais gratuitos para o ensino, a aprendizagem e a divulgação da matemática a todos os públicos. Esses Institutos oferecem suporte, promovem oficinas, fóruns de debate e de dúvidas. São ao todo 62 Institutos *Geogebra* em 44 países e o Instituto *Geogebra* do Rio de Janeiro, tem sua sede no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense e pode ser visitado no endereço <http://www.Geogebra.im-uff.mat.br/>. O Instituto *Geogebra* em São Paulo é sediado na PUC-SP e pode ser visitado pelo endereço eletrônico <http://www.pucsp.br/GeogebraSP/>. Outros institutos podem ser localizados clicando na opção Community do site oficial. (ZILKA, 2014, p.12).

Pesquisadores tem trabalhado para o avanço e melhoria do *software Geogebra*. Ele hoje tem a interface 3D ( Figura 2), quando foi desenvolvido só tinha a janela 2D, permitindo desse modo um avanço na geometria dinâmica, porque assim é possível uma melhor visualização das figuras espaciais ( cone, esfera, cilindro, pirâmide, paralelepípedo, prismas, cubo, parabolóide, etc.) (SOUZA, 2014), (VALÉRIO E SOUZA, 2013).

## **METODOLOGIA**

Aulas dialogadas com atividades práticas mediante o uso de smartphone, computadores ou laptop. Faremos uso de um *software* gratuito de geometria dinâmica, o *Geogebra*. No primeiro contato com os participantes do minicurso será apresentado o *Geogebra* e solicitado aos participantes que ainda não tem a ferramenta disponível que façam o download para os computadores/laptop ou smartphone. Em seguida partiremos para atividade prática de construção de circunferência trigonométrica e

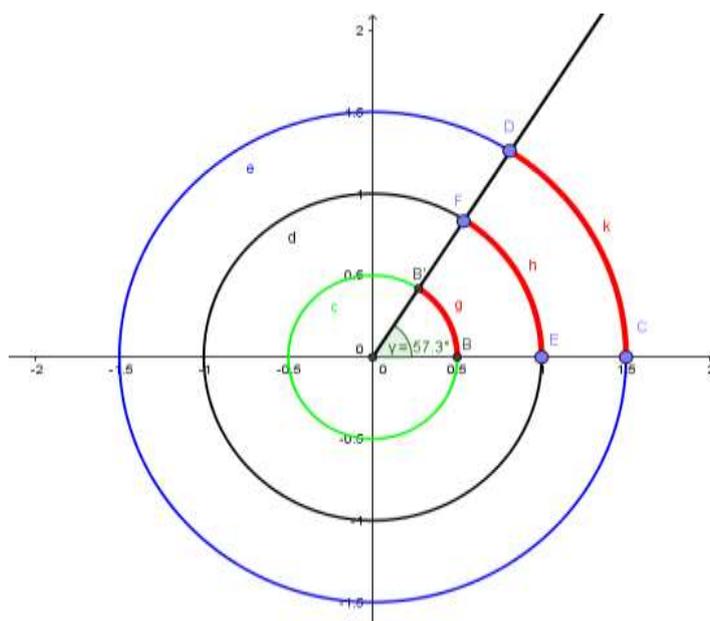
exploração da medida em radianos dos arcos trigonométricos e a construção de funções trigonométricas com o *Geogebra*. A ideia é apresentar uma ferramenta dinâmica para estudo de trigonometria, entre outros conteúdos matemático e estatístico; e com isso compartilhar, de forma lúdica, alguns conteúdos da matemática.

Neste minicurso será abordado os seguintes tópicos da trigonometria: arcos trigonométricos, seno, cosseno, tangente e suas inversas no ciclo trigonométrico e Redução ao 1º quadrante.

### Arcos Trigonométricos

Construir o ciclo trigonométrico de raio 1 e dividi-lo em arcos com unidade de medida em graus e radianos é o objetivo geral ao abordar arcos trigonométricos. Mais especificamente, pretende-se mostrar, por meio de construção, quantos radianos cabe em uma circunferência de raio 1. E se o raio for diferente de 1, quantos radianos cabem em uma circunferência? Para responder essas indagações será construído circunferência trigonométrica com raios diferentes de 1, isto é, raio menor que 1 e raio maior que 1 ( Figura 3). E formalizar a relação entre comprimento do arco e o ângulo central da circunferência trigonométrica.

Figura 3: Ciclos trigonométricos com raios iguais a 0,5, 1,0 e 1,5. Os arcos trigonométricos g, h e k tem todos mesma medidas, isto é, 1 rad



Fonte: Autor.

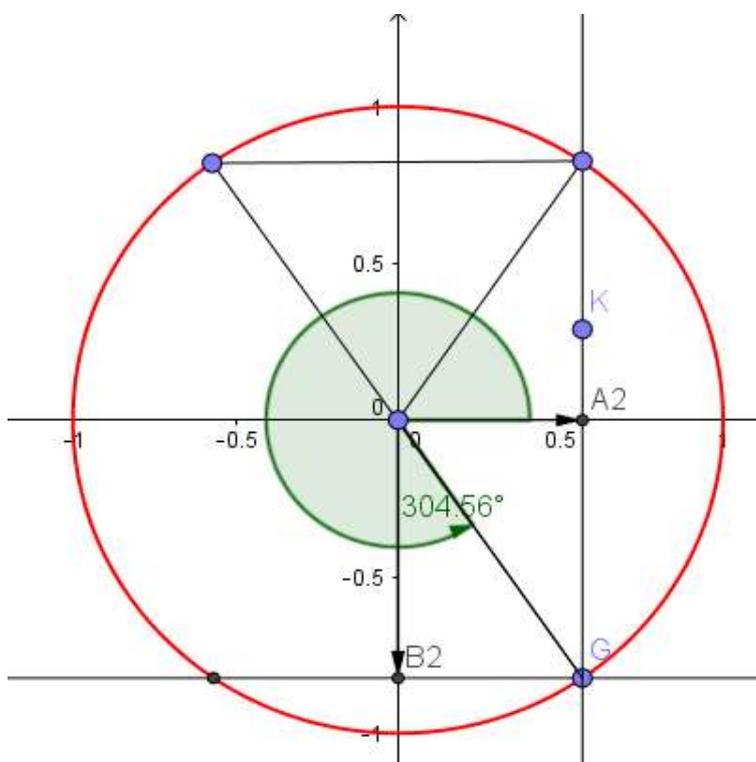
O objetivo disto é levar os inscritos no curso a refletirem sobre o seno, o cosseno, ..., e a cotangente de um arco para medidas do raio diferentes de 1. Bem

como compreender alguns obstáculos didáticos passados pelos livros de matemática quando abordam trigonometria.

### Redução ao 1º quadrante.

O objetivo geral deste tópico é reduzir os senos, cossenos, tangentes dos arcos e suas inversas ao 1º quadrante. Essa atividade será realizada com o uso do *software Geogebra* conforme a Figura 5 abaixo:

Figura 4: Redução ao 1º quadrante do seno e cosseno do arco de  $304.56^\circ$ .

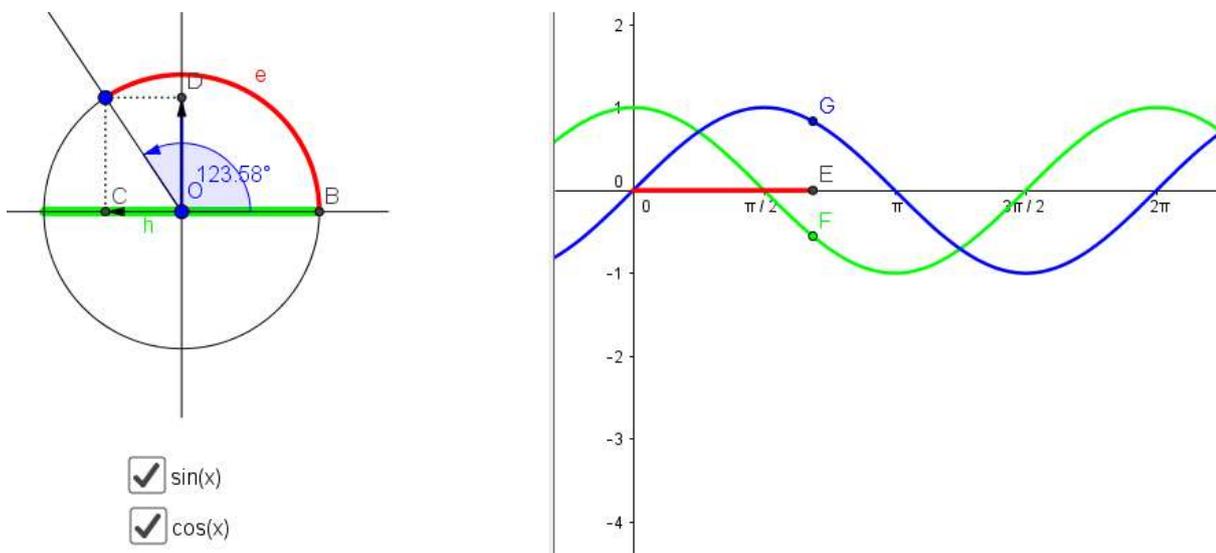


Fonte: Autor.

### Seno, cosseno, tangente e suas inversas no ciclo trigonométrico

No caso das funções circulares seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente de um arco trigonométrico, será discutido sobre os seus valores nos eixos que dividem a circunferência trigonométrica em quatro quadrantes. Será discutido como os livros didáticos abordam este conteúdo, quais situações didáticas são esboçadas para representar o seno, cosseno, etc. de um arco no ciclo trigonométrico pelos autores dos livros de matemática do ensino médio.

Figura 5: Seno e cosseno de um ângulo representado no ciclo trigonométrico e a representação gráfica da função  $\text{sen}(x)$  – curva azul e  $\text{cos}(x)$  – curva verde



Fonte: Autor.

Os objetivos específicos deste tópico são:

- Compreender as variações dos seno, cosseno, tangente e suas inversas;
- Localizar os pontos onde existe ou não existe o seno, cosseno, tangente e suas inversas;
- Construir os gráficos das funções circulares;
- Determinar, por meio de análise dos gráficos, o domínio, a imagem e o período das funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso de ferramentas computacionais como auxílio didático para o ensino de matemática (geometria plana e espacial, álgebra, funções, trigonometria no ciclo trigonométrico, estatística, etc.) vem, de fato, aumentando entre discentes e professores nos diferentes níveis de ensino. Porém, vale salientar que há uma parcela considerável de professores que estão alienados em relação ao manuseio de tais ferramentas computacionais didáticas.

Diante disso, este minicurso visa, entre outros objetivos e metas, compartilhar o uso do *Geogebra* como auxílio para o ensino de trigonometria no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas. Tendo a esperança que os participantes possam crescer no conhecimento e aplica-lo em suas aulas de trigonometria.

## REFERÊNCIAS

BARROS, A. P. R. *Contribuições de um micromundo composto por recursos do Geogebra e da coleção M<sup>3</sup> para a aprendizagem do conceito de volume de pirâmide*. 184 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade de Campinas, Campinas, 2013.

BEZERRA, L. A. *Aplicação do Geogebra no estudo da trigonometria: seno, cosseno e tangente*. 2013. Disponível em: <<http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/826/1/PDF%20-%20Leandro%20Ara%C3%BAjo%20Bezerra.pdf>> . Acesso em: 30 de Abril de 2017.

CORDEIRO, J. C. *Utilização do Geogebra na Construção de Instrumentos: Elipsógrafo*. 2014. 63 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

DA COSTA, N. F.; DA SILVA, J. G.; PRINCE, A. E. *Ensino e aprendizagem de história: tradicional x tecnologia*. Revista Univap, v. 22, n. 40, p. 726, 2017.

DOS SANTOS, A. B. C.; DE SOUZA, P. J. C.; NUNES, J. M. V. *Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar Conceptions of basic school mathematics teachers about school algebra*. Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156, v. 19, n. 1, 2017.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIA EM INFORMÁTICA – EDUMATEC. Disponível em: <[http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/softwares\\_index.php](http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/softwares_index.php)>. Acesso em 10 de Abril de 2017.

ESPITIA, L. E. R.; CRUZ, K. J. C.; OCHOA, C. P. F. *Influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función*. Praxis & Saber, v. 2, n. 3, p. 119-138, 2011.

LOPES, A. R. C.. *Livros didáticos: obstáculos verbais e substancialistas ao aprendizado da ciência química*. Revista brasileira de Estudos pedagógicos, v. 74, n. 177, 2007.

NETO, J. E. S. et al. *Elaboração e Validação de Jogos Didáticos Propostos por Estudantes do Ensino Médio*. Revista Debates em Ensino de Química, v. 2, n. 2, p. 47-54, 2017.

SOUZA, L. A. *Uma proposta para o ensino da geometria espacial usando o Geogebra 3D*. 2014. 66 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual Da Paraíba.

VALÉRIO, A. V.; SOUZA, L. R. *Ensino da geometria analítica com o uso do software Geogebra*. Revista Eletrônica de Educação e Ciência, Avaré, v. 3, n. 1, p. 7-14, 2013.

ZILKHA, Esther. *Utilização do Geogebra na Construção de Instrumentos: Teodolito*. 2014. 50 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.