



PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO: CONTRIBUIÇÕES DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Charles Bruno da Silva Melo¹

Eleni Bisognin²

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Este trabalho teve por objetivo investigar as contribuições que a Metodologia de Resolução de Problemas propicia para o ensino e aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas. A pesquisa, do tipo qualitativo, utilizou como instrumentos de coleta de dados, a observação participante, o diário de campo e a análise documental. Os participantes da pesquisa foram alunos de uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Candelária/RS. As atividades em sala de aula seguiram os passos da Metodologia de Resolução de Problemas, sugeridos por Onuchic e Allevato (2009) e utilizada a teoria de Tall e Vinner (1981) de Imagem de Conceito e Definição de Conceito para analisar como os conceitos de progressões são construídos pelos alunos. Os resultados indicaram que a metodologia contribuiu com o aumento da capacidade de argumentação durante as discussões, estabelecimento de relações entre as situações com as representações matemáticas; organização do planejamento das aulas, possibilidade dos alunos aprenderem a partir do erro e aprender a trabalhar de forma colaborativa. Portanto, baseando-se nos resultados dessa pesquisa, acredita-se que a Metodologia de Resolução de Problemas propicia um ambiente favorável de ensino e aprendizagem dos conceitos de progressões.

Palavras Chaves: Progressões. Metodologia de Resolução de Problemas. Imagem de Conceito e Definição de Conceito. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentam-se resultados de uma pesquisa, de caráter qualitativo, cujo objetivo foi investigar as contribuições que a Metodologia de Resolução de Problemas oferece para os processos de ensino e aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas para os alunos do segundo ano do Ensino Médio.

A escolha do tema fundamentou-se no fato de que os alunos apresentam muitas dificuldades relacionadas aos conteúdos de progressões. Isso se dá porque geralmente são desenvolvidos de forma estanque, engessados numa visão técnica sem a preocupação com o pensar matemático, além da falta de contextualização.

Dentro desse contexto, pretendeu-se então, desenvolver as habilidades de trabalhar com sequências e sua representação, a descoberta e identificação de padrões, estabelecendo a relação entre as funções como tema unificador de diversos

¹Mestre em Ensino de Matemática. Escola de Educação Básica Educar-se, UNISC. charlesmelo@unisc.br.

²Doutor em Matemática. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, RS. eleni@unifra.br

conceitos e procedimentos envolvidos. Sendo assim, foi associada a Metodologia de Resolução de Problemas e a teoria de aprendizagem desenvolvida por Tall e Vinner (1981) de Imagem de Conceito e Definição de Conceito, com o intuito de desenvolver os problemas como ponto de partida para a construção dos conceitos envolvidos, evitando a definição formal como uma estratégia para a inicialização dos conteúdos.

Por isso associou-se essa teoria com a resolução de problemas, possibilitando ao aluno construir o pensamento matemático por meio da experimentação, da observação, do questionamento, e da própria reflexão de forma colaborativa com os colegas.

A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Candelária/RS, na qual o pesquisador atua como professor (primeiro autor do artigo).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Metodologia de Ensino através da Resolução de Problemas

Os Parâmetros Curriculares Nacionais assinalam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles, como um dos objetivos do ensino de Matemática; indicam a resolução de problemas como ponto de partida e discutem caminhos para a Matemática na sala de aula.

Não somente em Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (BRASIL, 2000, p.52).

A partir dessas concepções, Onuchic e Allevato (2009) utilizam para o trabalho em sala de aula a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Para isso apresentam nove etapas para organizar as atividades ao colocar em prática essa metodologia.

- Selecionar e/ou criar um problema visando à construção de um novo conceito.
- Leitura do problema individualmente.

- Leitura em conjunto do problema.
- Os alunos buscam resolver o problema.
- Observar e incentivar por parte do professor.
- Explicação das respostas dos alunos para o problema na lousa.
- Plenária.
- Busca do consenso sobre o resultado correto.
- Formalização do conteúdo pelo professor.

Assim, o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de um conteúdo matemático começa com um problema que apresenta aspectos-chave e técnicas matemáticas que devem ser desenvolvidas na busca por respostas ao problema dado. A avaliação do conhecimento dos alunos é feita continuamente durante a resolução do problema.

A Metodologia Ensino através da Resolução de Problemas também propicia que os alunos sejam investigadores perante uma situação, um problema, de forma a compreender e questionar.

Os alunos investigam quando buscam, usando seus conhecimentos já construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução. (ONUICHIC, 2008, p. 83)

A utilização dessa metodologia vai ao encontro das finalidades previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002) para o que se espera do aluno do Ensino Médio, cujos objetivos são: compreender os conceitos, procedimento e estratégias matemáticas; aplicar seus conceitos matemáticos à situações diversas; analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes; desenvolver a capacidade de raciocínio e resolução de problemas; utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas; expressar-se oral escrita e graficamente em situações; estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos; reconhecer representações diferentes de um mesmo conceito e o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Imagem de Conceito e Definição de Conceito

Os termos “imagem de conceito” e “definição de conceito”, desenvolvidos por David Tall e Shlomo Vinner, indicam que grande parte dos conceitos que se emprega cotidianamente nem sempre estão formalmente definidos. Com relação à construção

de conceitos matemáticos, normalmente, o professor faz uso exclusivo de definições formais, o que, segundo Vinner (1983), pode causar problemas na aprendizagem do aluno.

Em se tratando de um conceito matemático, Tall e Vinner (1981), afirmam que este não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como referência única a sua definição formal. Os autores afirmam que para a definição formal ser plenamente compreendida pelo aluno, é preciso que ocorra uma familiarização precedente com o conceito em questão, desenvolvida a partir de uma exploração tendo como base impressões e experiências variadas.

Para Tall e Vinner (1981), conceito é como um símbolo ou nome que auxilia na sua manipulação mental. Porém a estrutura cognitiva que envolve um conceito é bem mais ampla que apenas a manipulação de um nome. Os pesquisadores utilizam o termo “imagem de conceito” para descrever a estrutura cognitiva ligada a um determinado conceito e a definem:

Usaremos o termo imagem de conceito para descrever a estrutura cognitiva total associada a este conceito, que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.” (TALL e VINNER 1981, p. 152)

Sendo assim, é fundamental que se coloque o aluno em contato com diferentes tipos de representações e elementos sobre determinado objeto matemático, para que ele possa formar uma imagem de conceito rica, além de propiciar um significado mais claro para a formalização de um conceito.

A interação entre os diferentes tipos de representação propicia um entendimento matemático mais profundo sobre os conceitos. Quando a imagem de conceito de um estudante se torna mais ampla, ele adquire uma concepção mais rica e abrangente do conceito matemático (ATTORPS, 2006, p. 111).

Conforme Escarlate (2008, p. 20), os elementos que colaboram para a formação de imagens de conceito podem ser “figuras, tabelas, diagramas, gráficos ou qualquer outro objeto matemático de natureza visual ou não, desde que esteja relacionado de alguma forma com o conceito em questão para o indivíduo.” O autor acrescenta ainda que existem muitos outros atributos nesse processo e isso irá depender do tipo de “experiências que o indivíduo terá e de como ele irá interagir com dada abordagem sobre o assunto” (ESCARLATE, 2008, p. 21).

Desse modo fica evidente que a imagem de conceito é uma particularidade subjetiva de um indivíduo, não fazendo sentido falar em imagem ligada a determinado

conceito de maneira geral. Segundo os autores, a aprendizagem da definição formal de um conceito requer o estímulo e o desenvolvimento anterior de uma imagem de conceito que seja essencialmente rica.

Sobre definição de conceito os autores colocam que ela é determinada como,

[...] uma reconstrução pessoal feita pelo estudante. É então o tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem. Se os conceitos definição lhe são dados ou construídos por si mesmo, podem variar de tempo em tempo. Dessa maneira, um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, este último sendo um conceito definição que aceito pela comunidade matemática (TALL e VINNER, 1981, p. 153).

Esta sentença pode tanto ser meramente decorada como aprendida de forma mais significativa pelo aluno. Pode também ser uma construção pessoal do próprio aluno, ou seja, uma forma de palavras usadas por ele para explicar o conceito do seu ponto de vista, utilizando para isso sua imagem de conceito. Assim, a definição de conceito pode ou não coincidir com a definição formal correspondente.

A teoria exposta sinaliza que a compreensão adequada de uma definição formal demanda uma imagem de conceito bem construída. Giraldo (2004) comenta que:

Da mesma forma que uma definição de conceito (mesmo uma que corresponda a definição formal) sem uma imagem de conceito rica poderia ser inútil; uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada pode ser traiçoeira. Uma definição de conceito inconsistente com a definição formal não é necessariamente parte de uma imagem de conceito pobre ou inconsistente; nem uma imagem de conceito pobre necessariamente inclui uma definição de conceito incorreta. Em resumo, uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes. Assim sendo, esta teoria sugere que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes. (p. 18).

Nesse trabalho são apresentadas situações-problema que propiciam ao aluno diferentes representações que favorecem a construção de imagens de conceito de progressões geométricas.

METODOLOGIA DE PESQUISA

A partir do embasamento teórico, foram elaboradas vinte atividades que tinham como propósito, primeiramente, identificar padrões e desenvolver o conceito de sequência, para construir posteriormente o conceito de progressão aritmética e

geométrica. Os alunos foram agrupados em cinco grupos, nomeados pelas cinco vogais, A, E, I, O e U.

Após a realização de cada atividade foi reservado um espaço para discutir e socializar as respostas dadas nas questões propostas, fazendo com que cada grupo expusesse e sanasse eventuais dúvidas ainda existentes de acordo com os passos preconizados pela Metodologia de Ensino através da Resolução de Problemas. O levantamento de dados deu-se a partir dos registros feitos pelo professor e pelos registros das atividades desenvolvidas pelos alunos. Neste trabalho são apresentadas somente três dessas atividades mostrando as imagens conceituais construídas pelos alunos.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

A primeira atividade tinha por objetivo estimular a construção de imagens de conceito acerca de sequência e a identificação de padrões.

Atividade 1 - Observe a sequência abaixo, descubra o padrão e responda:

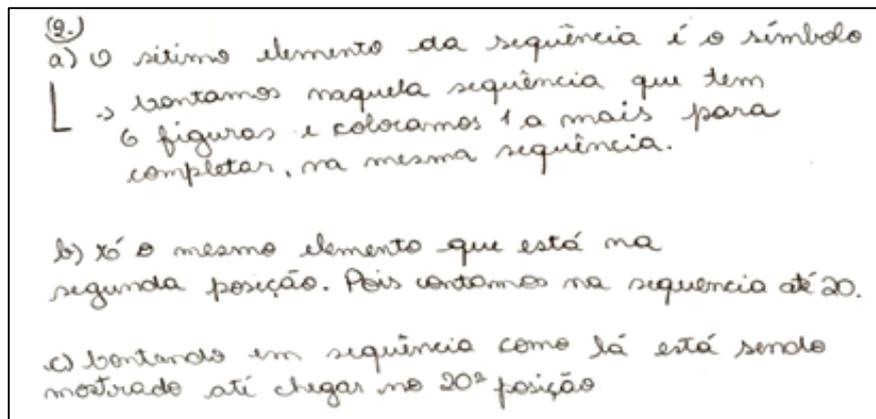


- Qual o 7º elemento da sequência?
- Sem desenhar, qual é o elemento que ocupa a 20ª posição nessa sequência?
- Qual foi o seu raciocínio para responder a pergunta anterior? Justifique.

Durante a leitura individual e em grupo, não houve questionamentos para o professor, mas as discussões entre os integrantes dos grupos foi mais intensa, de modo que pode se perceber que os alunos estavam mais envolvidos e estimulados na atividade, já que eles não tinham contato com essa metodologia.

Na plenária, notou-se que apenas um dos grupos observou a associação do desenho com as posições pares e ímpares, os demais realizaram a descoberta do padrão por meio da continuação até o 7º elemento, ou ao 10º e assim associando ao 20º elemento, para responder as questões. Mesmo a atividade informando e o professor advertindo que não poderia ser contando as posições, a maioria dos grupos realizou isso, exemplificado pelo registro do grupo U na Figura 1.

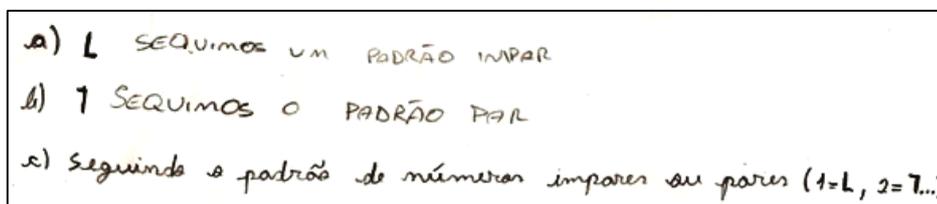
Figura 1: Resolução do grupo U para a Atividade 1.



Fonte: os autores.

Após a plenária, a solução correta escolhida em consenso foi a dos padrões na qual se associou as posições pares e ímpares, no caso, realizada apenas pelo grupo E conforme o registro na Figura 2. Esse grupo afirmou que iniciou sua busca pela resolução por meio da identificação de um padrão, no qual justificaram como sendo “algo que sempre continua igual e que pode ser com números ou não, como foi mostrado na primeira atividade”. Essa afirmação mostra que a partir de uma experiência vivenciada, esses alunos puderam associar um conjunto de palavras para o conceito de padrão, portanto definiram seu conceito imagem, ou seja, a definição de conceito como afirma Tall e Vinner (1981).

Figura 2: Solução correta apresentada pelo grupo E na atividade 1.



Fonte: os autores.

Após a conclusão da atividade, juntamente com os alunos, foi formalizado o conceito de sequência numérica, como requisito para o estudo das progressões.

A segunda atividade tinha por intuito introduzir o conceito de progressão aritmética.

Atividade 2 - A variação da temperatura num dia de inverno é descrita na tabela abaixo

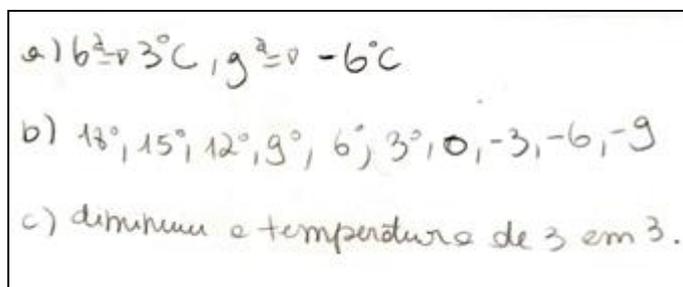
Medidas	Temperatura
1ª	18°C
2ª	15°C
3ª	12°C
4ª	9°C
5ª	6°C

- Se a temperatura continuar a variar desse modo, qual será a 6ª medida? E a 9ª?
- Construa a sequência dos 10 primeiros termos dessa sequência.
- Que padrão de regularidade você observou nos valores tabulados?
- Construa um gráfico com as medidas obtidas para a temperatura.
- O gráfico que você obteve representa uma função?

Nessa atividade dois grupos perguntavam novamente o que era o termo de uma sequência, momento em que o professor ficou apreensivo, pois pensava que esse conceito já estava bem definido para os alunos. Foi necessário retomá-lo de modo sucinto.

Novamente a plenária foi realizada oralmente, visto que os alunos não tiveram grandes dificuldades na resolução e tinham trabalhado de modo rápido e dinâmico. Na Figura 3, está o registro do grupo A, sendo essa a resposta escolhida em consenso como a correta. Os demais grupos apresentaram a mesma solução.

Figura 3: Solução das letras a, b e c da atividade 2 feita pelo grupo A.



Fonte: os autores.

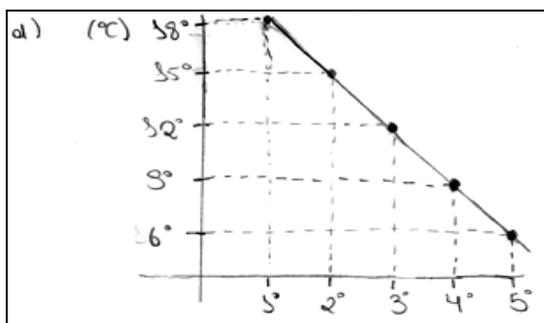
Resolvidas essas questões, os alunos deveriam construir um gráfico relacionando as medições com a temperatura. Nessa etapa, foi necessário lembrá-

los do plano cartesiano, já que muitos grupos não associaram o nome com a sua representação, o que demonstra uma falha na definição de conceito referente ao mesmo, que pode ser fruto de um sistema de ensino marcado meramente pelo processo de memorização de fórmulas e de métodos mecânicos produzindo assim imagens conceituais pobres nos alunos.

Durante a plenária, realizada a partir dos registros no quadro para a representação do gráfico, o grupo A e o grupo I, ligaram os pares ordenados formados entre a medição e a temperatura por meio do traço de uma reta, e os demais grupos não fizeram essa representação. Nesse momento o papel do professor se tornou fundamental a partir dos questionamentos sobre a ligação desses pontos ou não, ele se tornou um mediador no processo de ensino e aprendizagem, não mais um transmissor.

A Figura 4 apresenta a representação feita pelo grupo A, semelhante a do grupo I. Eles afirmaram que o gráfico deveria ter os pontos ligados, pois todos os gráficos que tinham trabalhado no ano anterior, eram sempre ligados. Essa estratégia demonstra que os alunos estavam apenas reproduzindo gráficos, sem a compreensão do contexto envolvido.

Figura 4: Representação feita pelo grupo A na questão d.

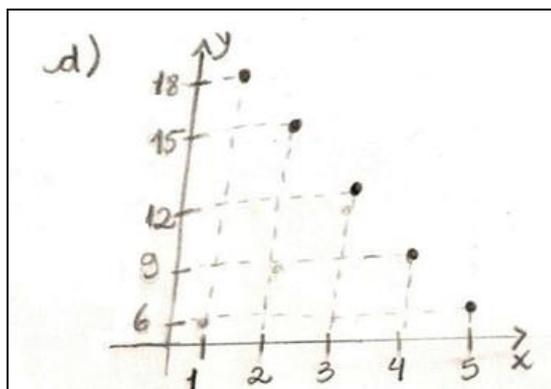


Fonte: os autores.

Os demais grupos, apenas marcaram os pontos no gráfico. Quando questionados sobre essa conclusão, justificaram apenas que estavam relacionando duas grandezas a partir da tabela e tinham dúvidas se os pontos deveriam ser ligados por uma reta, ou seja, não sabiam explicar porque não tinham ligado os pontos. Esse fato demonstra que esses alunos também não compreenderam o contexto envolvido e o que representava esse gráfico para a atividade, somente construíram o gráfico

desse modo. Apenas o Grupo U representou o gráfico por meio de pontos como é apresentado na Figura 5.

Figura 5: Representação feita pelo grupo U para a questão d.

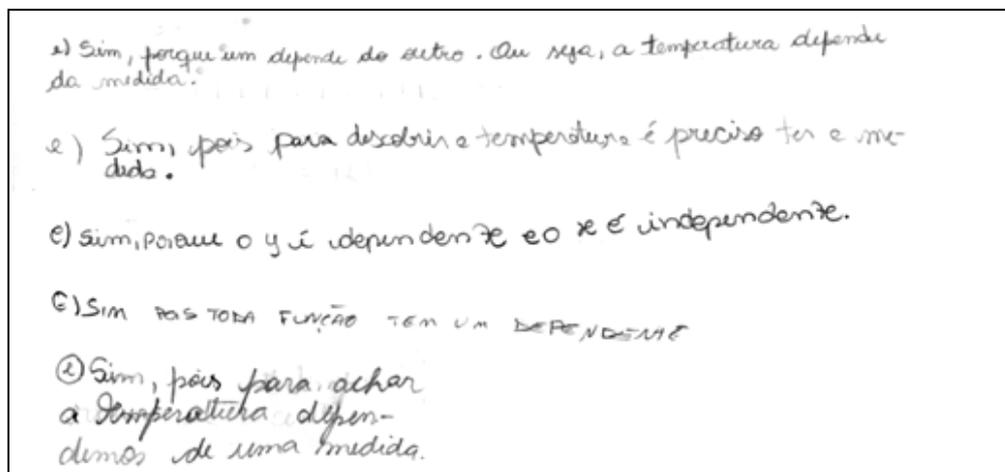


Fonte: os autores.

A partir dos registros dos alunos, foi possível constatar que três grupos utilizaram nos eixos a representação como x e y , não utilizando o contexto da situação apresentada entre as medições e temperaturas. Diante disso é possível notar que a representação dos eixos está ligada a uma memorização, sem analisar o contexto envolvido. Eles não estabeleceram conexões entre os diferentes registros e seus significados, o que se contrapõe ao que prevê os PCN+ (BRASIL, 2002b), apenas reproduziram.

Para continuar a discussão sobre a representação dos gráficos, foi questionado se o gráfico construído representava uma função. Nesse caso, todos os grupos afirmaram que se tratava de uma função, pois havia “uma dependência” entre medições e temperaturas conforme representação na Figura 6. O que demonstra que a definição de conceito de função estabelecida por eles é limitada. Portanto é necessário que se explore mais a mobilização de imagens de conceito de funções, uma vez que as progressões aritméticas e geométricas, são funções com domínio no conjunto dos números naturais.

Figura 6: Justificativa dos grupos para uma função da questão e.



Fonte: os autores.

Posteriormente, foi necessário o professor retomar o conceito de domínio e a imagem de uma função, para que os alunos pudessem resolver essa questão, e por sua vez, descobrir se os pontos do gráfico deveriam ser ligados ou não. Então, professor questionou se os valores de x , nesse caso os valores das medições, poderiam admitir quaisquer números; a maioria dos grupos respondeu que não, pois não seria possível, por exemplo, ter uma “meia medição” de temperatura ou uma “medição negativa”, sendo assim concluíram que o domínio era o conjunto dos números naturais.

Já os valores de y , ou seja, da temperatura poderiam admitir somente números inteiros, pois a variação da temperatura é de três em três graus, portanto afirmaram que a imagem da função era o conjunto dos inteiros, iniciando no número 18 e “saltando” de três em três.

Depois dessas conclusões, realizadas na plenária oralmente, um aluno do grupo A afirmou: “mas se o domínio é dos naturais e a imagem dos inteiros, o gráfico não pode ser ligado!”. Na sequência os demais alunos acompanharam a explicação do colega, que justificou que o “traço” definiria como sendo qualquer número, ou seja, o conjunto dos reais.

Foi indagado, ainda, se essas medições poderiam continuar indefinidamente o que foi logo respondido que, nessa situação específica de medir a temperatura, não. Concluiu-se, portanto, que esse conjunto era limitado.

Nessa situação comprova-se que a partir de situações-problema pode-se levar o aluno a concluir conceitos, fugindo da perspectiva de que a Matemática está pronta e acabada, bem como da definição formal como sugerem Tall e Vinner (1981).

A terceira atividade visava desenvolver o conceito de progressão geométrica.

Atividade 3 - Carlos fez uma aplicação de R\$ 500,00 por 6 meses a uma taxa de juros de 3% ao mês.

- Quanto ele receberá no 3º mês? E no 5º mês?
- Construa uma tabela que mostre o valor de cada mês.
- Essa situação é uma progressão geométrica? Explique.
- Nesse caso tem-se uma função? Justifique.

Quanto ao processo de resolução, os grupos utilizaram como estratégia, o cálculo dos juros até chegar ao mês estabelecido. Na Figura 7 é mostrada a solução apresentada pelo grupo A para a primeira questão.

Figura 7: Resolução apresentada pelo grupo A.

$$\frac{530,45 \cdot 3}{100} = \frac{1591,35}{100} = 15,9135 + 530,45 = 546,3635 \rightarrow 3^\circ \text{ mês}$$

$$\frac{562,754405 \cdot 3}{100} = 16,88263215 + 562,754405 = 579,6370372 \rightarrow 5^\circ \text{ mês}$$

Fonte: os autores.

Na próxima questão era solicitada a construção de uma tabela com o valor que de cada mês decorrido. Não foi necessária a intervenção do professor, visto que os alunos não tiveram dificuldades de interpretação e nem dúvidas quanto à construção. Os alunos sabiam como estruturá-la, bem como calcular os juros de cada mês. Nessa questão, os alunos comentaram que a tabela auxiliou na compreensão da situação envolvida. Na Figura 8 é mostrada a tabela de valores construída pelo grupo O, sendo a mesma construída pelos demais grupos.

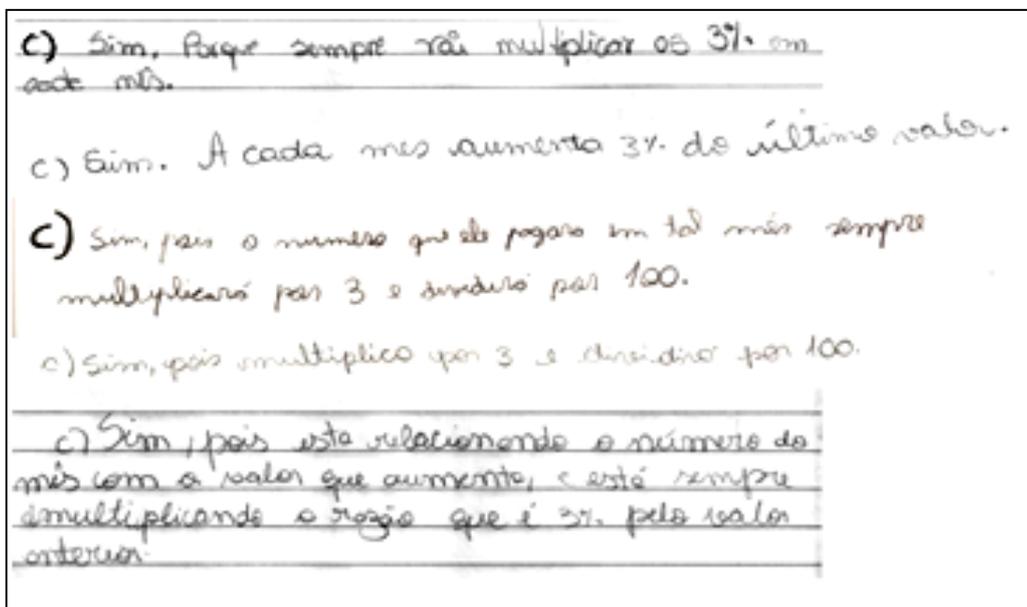
Figura 8: Tabela apresentada pelo grupo O.

valor	mes
500	0
515	1
530,45	2
546,36	3
562,49	4
579,64	5
597,03	6

Fonte: os autores.

A questão seguinte perguntava se a situação apresentada representava uma progressão geométrica. Todos os grupos afirmaram positivamente conforme Figura 9.

Figura 9: Registro dos grupos para questão c.

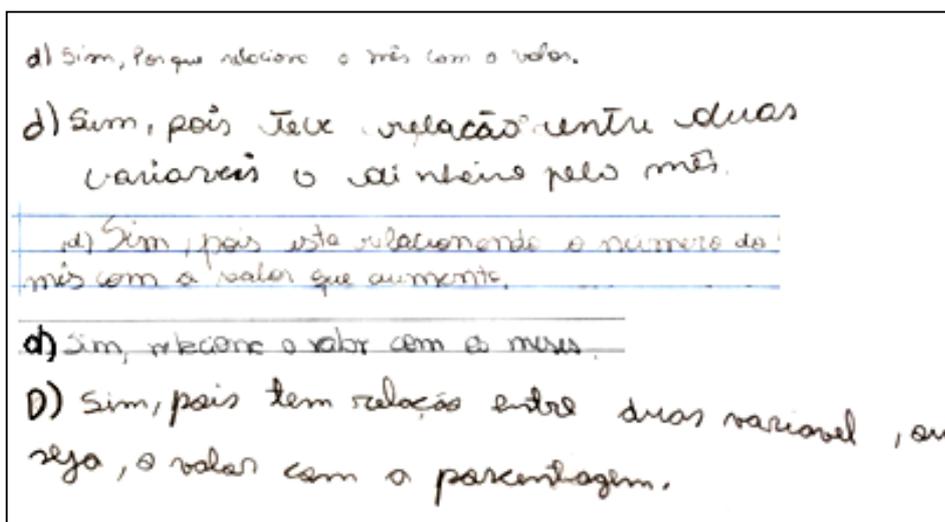


Fonte: os autores.

Nessa atividade a generalização só foi possível com o auxílio do professor no momento da socialização.

Finalizando essa atividade era questionado se a situação era uma função. Os grupos responderam que se tratava de uma função, pois relaciona o mês com o valor a ser pago, ou seja, duas variáveis, na qual é possível verificar na Figura 10. Com essa justificativa dada pelos grupos durante a plenária, foi possível constatar que eles não evoluíram em relação ao conceito de função, pois apresentaram a mesma resposta em uma atividade do anterior.

Figura 10: Resolução dos grupos para a questão d.



Fonte: os autores.

Foi possível observar, no desenvolvimento dessas atividades simples, como os alunos constroem as imagens conceituais sobre progressões aritméticas e geométricas e como a metodologia utilizada contribui para essa construção.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de aplicar atividades em sala de aula seguindo os passos da Metodologia de Resolução de Problemas, sugeridos por Onuchic e Allevato (2009) aliada a teoria de Tall e Vinner (1981) de Imagem de Conceito e Definição de Conceito para o ensino de progressões, no Ensino Médio, constatou-se que as contribuições dessa metodologia para o ensino e aprendizagem desses conteúdos foram: houve um aumento da capacidade de argumentação durante as discussões, pois anteriormente os alunos não participavam ativamente da aula; estabelecimento de relações entre as situações com as representações matemáticas possibilitando uma constante reflexão sobre os conceitos trabalhados; organização do planejamento das aulas, já que o

professor no decorrer do processo pode avaliar se era necessário aprofundar-se mais em um conceito ao poder dar continuidade ao conteúdo; possibilitou aos alunos aprenderem a partir do erro, uma vez que eles perderam o “medo de errar” e aprenderam a trabalhar de forma colaborativa.

Portanto, baseando-se nos resultados dessa pesquisa, pode-se inferir que a Metodologia de Resolução de Problemas propiciou a construção de imagens de conceito que deram significado ao conceito de progressão aritmética e progressões geométricas.

REFERÊNCIAS

ATTORPS, I. **Mathematics teachers' conceptions about equations**. 2006. (Thesis in Applied Education). University of Helsinki. Disponível em: <http://helda.helsinki.fi/bitstream/handle/10138/20050/mathemat.pdf?sequence=1>. Acesso em: 22 out. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática)**. 3 ed. Brasília, 2000.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília, 2002.

ESCARLATE, A. C. **Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos computacionais: O Caso da Derivada**. 2004. Tese (Doutorado em Ciências) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

ONUCHIC, L. R. Uma História da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: Seminário de Resolução de Problemas, 1., 2008, Rio Claro. **Anais eletrônicos**. Rio Claro: GTERP, 2008. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/completo3.pdf. Acesso em: 27 dez. 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEN**, Rio de Janeiro, v. 55, p. 1-19, 2009.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Education and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.

