



## A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO EM GEOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Antonio Noel Filho<sup>1</sup>

### Temática do Artigo: Formação de Professores que Ensinam Matemática

**Resumo:** Uma simples observação nos documentos oficiais para o ensino de matemática, bem como nos atuais livros didáticos, nos revela que, diferentemente de épocas passadas, a Geometria ocupa uma posição de destaque entre os conteúdos matemáticos presentes. Contudo, ainda muito se questiona sobre o seu ensino-aprendizagem na educação básica. Pesquisas indicam que tal problema pode ser, em parte, reflexo da formação inicial do professor de Matemática. Pensando nesta problemática, relatamos aqui os resultados de uma experiência realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Sorocaba. Com o objetivo de levar os futuros professores a construir conhecimentos de geometria plana e espacial, essenciais ao seu desenvolvimento profissional, aproveitamos as potencialidades do Laboratório de Educação Matemática para propor uma sequência de oficinas, onde o ambiente, além do contato com variados materiais didáticos e diferentes metodologias de ensino, possibilitasse momentos de reflexão e discussão sobre geometria e seu ensino.

**Palavras Chaves:** Geometria. Laboratório de Educação Matemática. Formação Inicial. Metodologias de Ensino. Licenciatura em Matemática.

### 1. Introdução

Uma breve observação nos documentos oficiais, parâmetros curriculares nacionais, propostas curriculares estaduais para o ensino de matemática e nos atuais livros didáticos, revela que, diferentemente de épocas passadas, a Geometria ocupa uma posição de destaque entre os conteúdos matemáticos propostos. Porém, muito ainda se questiona sobre a qualidade do seu ensino-aprendizagem em todos os níveis, mas principalmente na educação básica. Pesquisas recentes em Educação Matemática revelam que parte deste problema pode estar relacionado à formação inicial do professor de matemática que, muitas vezes, provém de cursos de licenciatura que deixam muito a desejar quando se trata da formação e qualificação profissional dos futuros professores. Considerando esta problemática, analisamos as ementas dos componentes curriculares do curso de licenciatura em Matemática da Universidade de Sorocaba, onde constatamos que os conteúdos de

---

<sup>1</sup> Doutor. Instituto Federal de São Paulo - Campus São Roque. antonio.noel@ifsp.edu.br

geometria são abordados em quatro componentes curriculares específicos, Geometria I, Geometria II, Laboratório de Ensino Aprendizagem de Matemática e Geometria Analítica e Vetores, além de figurarem em diversos problemas aplicados dos componentes de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais e Aplicações. Contudo, temos acompanhado que boa parte dos alunos do último ano deste curso, que já cursaram estes componentes curriculares, ainda apresentam grandes dificuldades quando submetidos a questões que exigem algum conhecimento em geometria. Considerando que isto poderá refletir diretamente no processo ensino-aprendizagem de geometria na educação básica, onde estes futuros professores serão os protagonistas do processo, com o objetivo de minimizar esta problemática, pensamos em uma sequência de atividades em forma de oficinas a serem realizadas no Laboratório de Educação Matemática da universidade, onde o envolvimento com as diferentes metodologias de ensino na abordagem de conteúdos de geometria plana e espacial, pudesse levar seus participantes a perceberem que a construção do conhecimento em geometria, deve passar por diferentes etapas, onde o experimental e o teórico possam caminhar de forma indissociável.

## **2. Aspectos teóricos**

Um levantamento prévio, nos mostrou que um dos maiores problemas da aprendizagem em geometria por parte dos nossos alunos, estava ligado à formação conceitual de alguns entes geométricos. Embora alguns deles, já tivessem cursado os componentes curriculares que abordavam os conteúdos específicos da área de geometria, deixavam transparecer que havia ficado grande lacuna quando indagados sobre alguns conceitos básicos de geometria e isto, aliado a falta de conhecimentos metodológicos, certamente refletirá no seu fazer em aula na educação básica.

A importância desses conhecimentos ao professor como mediador no processo de ensino e aprendizagem de matemática é destacada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN do Ensino Fundamental (Brasil, 1998) ao trazer que:

Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como

ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.  
(BRASIL, 1998, p. 36)

Em relação aos conceitos geométricos, no currículo de matemática do ensino fundamental, o documento destaca que:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.  
(BRASIL, 1998, p. 51)

No nível médio, a geometria assume uma posição que vai além de sua importância intrínseca à matemática, ela é fundamental na sua integração com as outras ciências.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (Brasil 2000), a Geometria exerce grande importância no bloco das Ciências da Natureza, pois pode contribuir com a compreensão do significado das ciências e das tecnologias presentes no nosso meio, bem como do universo físico e da vida planetário, uma vez que possibilita a conexão de diversos conhecimentos geométricos com suas aplicações tecnológicas e práticas cotidianas. Desta forma, o conhecimento geométrico possibilitará, ao indivíduo, uma melhor compreensão da realidade e do mundo que o cerca.

Neste nível de ensino, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (Brasil, 2002), destacam que o ensino de Geometria não deve ficar estritamente ligado às medidas que fazem a ponte entre o estudo das formas geométricas e os números que quantificam determinadas grandezas como cálculo de distâncias, áreas e volumes, mas também explorar as relações geométricas entre elas.

Para desenvolver o raciocínio geométrico de forma mais completa, o ensino de Geometria na escola média deve contemplar também o estudo de propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. (BRASIL, 2002, p. 123)

Para que o professor possa dar um tratamento adequado ao processo de ensino-aprendizagem de Geometria na educação básica é necessário que ele tenha

um amplo conhecimento não somente dos conceitos geométricos, mas também das questões metodológicas envolvidas nas suas possíveis abordagens.

Para Duval (2009) não é possível estudar fenômenos relacionados ao conhecimento humano sem utilizar a noção de representação, em relação aos objetos matemáticos, por serem abstratos, necessitam de uma mediação para se tornarem acessíveis ao indivíduo. Portanto, para acessar o objeto matemático é fundamental utilizar suas representações semióticas como tabelas, registros algébricos, gráficos, diagramas, esquemas, desenhos, figuras geométricas, entre outros. Porém, a aprendizagem de um determinado conceito matemático, ou seja, a construção efetiva do conhecimento, só acontecerá se o estudante for capaz de distinguir o objeto matemático de seus variados registros. Geralmente é possível dar várias representações a um mesmo objeto matemático.

Segundo Duval (2003), para que ocorra a construção do conhecimento é necessária que haja a mobilização dessas representações:

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. (DUVAL, 2003, p.14)

Ainda de acordo com o autor, na teoria dos registros de representação semiótica há duas transformações de representações semióticas fundamentais, que são consideravelmente diferentes: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro e as conversões estão relacionadas com a passagem de uma representação para outra.

Para Machado (2002), a dinâmica da construção do conhecimento em geometria se dá pela caracterização de quatro aspectos fundamentais: a percepção, a construção, a representação e a concepção, que o autor, metaforicamente relaciona com as quatro faces de um tetraedro, por este ser um sólido que pode ser equilibrado por qualquer uma de suas faces. Neste aspecto, o autor ressalta que o conhecimento geométrico pode ser equilibrado quando a ênfase for apoiada em qualquer um dos seus processos, uma vez que cada um deles se relaciona como os demais. O autor desta que:

[...] não obstante o fato de a iniciação em geometria realizar-se por meio da percepção de formas e de suas propriedades características, através de atividades sensoriais, como a observação e a manipulação de materiais, desde cedo tais atividades relacionam-se diretamente com a construção de

objetos em sentido físico, através de massas, varetas ou papéis, por exemplo, bem como com a representação de objetos, através de desenhos, onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas. (MACHADO, 2002, p. 54).

Para explorar todas as etapas necessárias à construção do conhecimento, em especial, no caso da geometria, o aluno precisa dispor de um ambiente adequado que permita seu contato com diferentes materiais didáticos e diferenciadas metodologias de ensino. Há consenso entre educadores matemáticos que um laboratório específico para esta área pode trazer grandes benefícios ao processo de ensino-aprendizagem e poderá ser o diferencial oferecido por qualquer curso de formação de professores.

Lorenzato (2006), destaca que um laboratório na área de educação matemática deve ser um ambiente adequado à criação e desenvolvimento de atividades experimentais e a produção de materiais manipuláveis. Ele precisa o centro da vida matemática do espaço escolar e não apenas um depósito de materiais, uma simples sala de aula, uma biblioteca ou museu de matemática. Deverá ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras, uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar, e fazer acontecer o pensar matemático. Um ambiente deste tipo, poderá levar o aluno a momentos de reflexão, a levantar questionamentos, a conjecturar, a experimentar, a analisar e tirar conclusões.

Observando que o Laboratório de Educação Matemática da Universidade de Sorocaba conta com diferentes materiais didáticos manipuláveis, confeccionados na sua maioria por alunos do curso, além de jogos e quebra-cabeças, obras de arte, aparelhos de medição, computadores com softwares específicos, mídias de projeção e áudio, livros e trabalhos de conclusão de curso, entre outros, vimos neste ambiente, condições ideais para a exploração dos aspectos acima. (Figura1).

Figura 1. Laboratório de Educação Matemática - Uniso



Fonte: Acervo pessoal

### 3. Procedimentos metodológicos

Foram dez oficinas, denominadas de O1 à O10, realizadas com dez estudantes do curso de licenciatura em Matemática da Universidade de Sorocaba, em dez encontros quinzenais de três horas, aos sábados, no Laboratório de Educação Matemática, sendo que os sábados que intercalavam os encontros, foram dedicados ao término das atividades não finalizadas durante o encontro, às leituras e considerações de caráter metodológicas. Para estas atividades extraclasse foram consideradas mais 10 horas, totalizando assim, 40 horas de trabalho. As diretrizes para a elaboração e desenvolvimento das oficinas foram norteadas pela seguinte questão: Como é construído o conhecimento em geometria?

As oficinas foram nomeadas pelas suas características principais e, após cada realização experimental, os participantes eram direcionados à formalização dos conceitos envolvidos e a discussões de caráter metodológico em relação ao processo ensino-aprendizagem de geometria. No início de cada oficina, os alunos recebiam um roteiro semelhante ao detalhado na oficina O1.

#### O1: Figuras planas e figuras espaciais

Nesta oficina, a turma foi dividida em três grupos, sendo um deles com quatro alunos, onde cada grupo recebeu uma coleção com diversas figuras recortadas em papel cartão e variados sólidos geométricos confeccionados em papel, acrílico e madeira. O objetivo foi explorar as ideias que eles tinham a respeito de figuras planas e espaciais e, em seguida, além de explorar aspectos próprios da linguagem matemática, encaminhá-los às definições e formalizações.

O roteiro desta atividade trazia as seguintes indicações:

- 1º) Separe as figuras em dois grupos, figuras planas e espaciais e diga qual o critério utilizado.
- 2º) Pegue somente as figuras espaciais e separe-as em dois grupos, poliedros e corpos redondos e sempre destaque o critério utilizado.
- 3º) Pegue somente o grupo dos poliedros e separe-o em três grupos de figuras com características semelhantes. Tem algum que não se encaixa em nenhum destes três? Tem algum que se encaixa em mais de um dos grupos?
- 4º) Nas figuras do item anterior, como você identificaria vértices, faces e arestas?
- 5º) Escolha 10 entre os poliedros, nomeie-os, conte o número de vértices, faces e arestas de cada um, preencha uma tabela com os dados e tente encontrar uma relação entre eles.
- 6º) Entre os corpos redondos, que figuras você colocaria no grupo dos cilindros? No grupo dos cones? E das esferas? Alguém ficou fora destes três grupos?
- 7º) Defina com suas próprias palavras, cada um dos seguintes objetos geométricos: figura plana, figura espacial, poliedro, corpo redondo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

## O2: Representações planas e planificações

O objetivo desta oficina foi, a partir da exploração da representação plana de alguns sólidos geométricos por diferentes perspectivas e da construção geométrica com régua e compasso de suas planificações, levar seus participantes a diferenciar representação plana de planificação de uma figura espacial.

## O3: Visualização e construção de modelos auxiliados por Softwares de Geometria Dinâmica.

O objetivo da oficina foi mostrar a importância do auxílio de alguns softwares específicos como o Geogebra, o Poly e o Wingeom, na dinamização do processo de ensino-aprendizagem de geometria, uma vez que permitem explorar, com maior rapidez, a visualização, a representação plana e a construção de planificações de figuras espaciais, bem como a exploração de propriedades geométricas e a resolução de problemas geométricos diversos.

## O4: Confecção de sólidos geométricos

O objetivo desta oficina foi confeccionar os sólidos geométricos com diferentes materiais como papel cartão, varetas e canudos. E, em seguida, destacar a importância de cada um destes materiais didáticos na visualização, na exploração de propriedades e na resolução de problemas característicos que exigem conhecimentos relativos aos sólidos geométricos.

#### O5: Conceito de área de uma região plana

Nesta oficina o objetivo foi explorar, através de projeções ortogonais, decalques, ladrilhamento, composição e decomposição de figuras, o conceito de área de uma região plana. E em seguida, chegar a generalização e a formalização das áreas das principais figuras planas, triângulos, retângulos, paralelogramos, trapézios, polígonos regulares e círculos. Além de abordar as unidades de medidas padronizadas já conhecidas, os alunos foram motivados a criar outras unidades não-padronizadas de medida de superfície.

#### O6: Conceitos de volume e capacidade

Esta oficina foi pensada de modo que os alunos pudessem chegar aos conceitos de volume e capacidade, partindo de suas ideias centrais e da experimentação. A exemplo da oficina O1, além das unidades padronizadas de medidas, foram construídas outras unidades não-padronizadas.

#### O7: Prismas e pirâmides

Nesta oficina, o objetivo foi levar os participantes à exploração de propriedades de prismas e pirâmides, calcular suas áreas superfícies e chegar às fórmulas dos cálculos dos volumes destes sólidos. A generalização do volume do prisma e da pirâmide foi apoiada no Princípio de Cavalieri. Destacamos ainda a construção com régua e compasso das planificações das três pirâmides e a confecção dos sólidos.

#### O8: Cones e esferas

Com o objetivo de levar os participantes à exploração de propriedades e chegar à formalização dos volumes destes sólidos, para o cone, admitimos a ideia de que o polígono de  $n$  lados da base pode ser aproximado por uma circunferência, fazendo  $n$  cresce tender ao infinito e, portanto, o seu volume pode ser calculado

semelhantemente ao caso da pirâmide. Na demonstração da fórmula do volume da esfera, usamos o Princípio de Cavalieri para a comparação entre o seu volume e o do sólido resultante da supressão de dois cones equivalentes do cilindro circunscrito à ela.

#### O9: A Geometria e a História da Matemática

O objetivo desta oficina foi mostrar que o uso da história da Matemática como metodologia de ensino pode despertar a curiosidade do aluno em conhecer os princípios que deram origem às teorias e formalizações de conceitos matemáticos, em especial, aos de geometria. Para tal, foram abordados dois problemas históricos da geometria, Tales e o problema do cálculo da altura das pirâmides e o cálculo do raio da Terra por Erastóstenes.

#### O10: Conhecimentos específicos x metodologias de ensino.

Esta última oficina foi dedicada ao fechamento dos trabalhos, onde além das análises e discussões gerais e da avaliação final das oficinas, cada participante foi motivado a produzir um pequeno texto, destacando que conhecimentos específicos e metodológicos foram adquiridos/construídos por ele ao final destas atividades e o que isto implicaria no processo de ensino-aprendizagem de geometria.

### **4. Resultados e discussões**

Destacamos aqui a oficina O4: Confeção de sólidos geométricos, pois com ela concluímos uma sequência que, de acordo com nosso referencial teórico, é fundamental no processo de construção do conhecimento geométrico, uma vez que no momento de sua realização os participantes já haviam passado pelas etapas de visualização, manipulação, representações, identificação de propriedades e construções geométricas, explorados nas três primeiras oficinas. No primeiro item, os participantes deveriam construir, com régua e compasso, as planificações dos poliedros regulares e em seguida, confeccioná-lo em papel cartão (Figura 2). Cada poliedro foi tratado por sua nomenclatura, em representação linguística ou natural. Três dos participantes, mesmo depois de passarem pelas etapas acima citadas, apresentaram dificuldades na identificação dos poliedros, além de confundirem a planificação do sólido com sua representação plana. Neste caso, em concordância

com Duval (2003), ao receber a figura por sua nomenclatura, não houve a conversão da apresentação linguística para a representação figural, levando-os a não distinguir o objeto matemático em questão de suas representações nos variados registros. Os demais não apresentaram grandes dificuldades na realização da tarefa. Para estes últimos, concordamos com Machado (2002), que embora a sequência apresentada não seja necessária, a atividade possibilitou a exploração e caracterização dos quatro aspectos destacados por ele como fundamentais na construção do conhecimento geométrico.

Figura 2. Confeção de poliedros regulares.



Fonte: Arquivo pessoal

No segundo item, foi sugerido que cada grupo, observando o número de vértices faces e arestas, confeccionasse um poliedro com varetas e tubos cirúrgicos (Figura 3) e um com papel cartão e elásticos (Figura 4). Neste caso, todos conseguiram realizar a atividade sem grandes problemas e ao serem indagados, afirmaram que embora mais trabalhosa que a anterior, a atividade não trouxe grandes dificuldades como, por exemplo, as trazidas pela planificação do cubo e do octaedro regular, onde não bastava construir o total de faces, mas dependia das suas disposições, pois caso contrário a figura não poderia ser montada. De acordo com as propostas dos PCN+(Brasil, 2002), este bom desempenho está relacionado com a compreensão das relações existentes entre figuras espaciais e planas nos

poliedros e as propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais, além da caracterização de seus elementos principais.

Em relação aos sólidos produzidos, a maioria mostrou uma certa preferência pelos da Figura 3, pois segundo eles, a visão interna dos poliedros, facilita a visualização de vértices, faces e arestas, além da identificação de ângulos, alturas, paralelismos e perpendicularidades. Embora os demais tenham concordado depois, apenas um aluno mostrou-se mais entusiasmado pelos sólidos da Figura 2, pois para ele, estes se identificam mais facilmente com os objetos e as embalagens do cotidiano.

Figura 3. Confeção de prismas e pirâmides.



Fonte: Arquivo pessoal

Sobre os sólidos da Figura 4, três alunos relataram que estes modelos podem facilitar a compreensão de problemas que envolvam o cálculo da área de suas superfícies, pois ao serem desmontados, permitem fácil identificação de suas faces. Foi relatado também sobre a beleza destes sólidos, pois podem ser confeccionados com faces multicores, diferentemente dos confeccionados a partir de suas planificações.

Figura 4. Confeção de poliedros bola.



Fonte: Arquivo pessoal

No geral, pelas discussões e intervenções de caráter metodológico durante a realização das atividades, as reflexões após leituras dos referenciais teóricos e os textos produzidos pelos alunos, pudemos perceber que, além do grande envolvimento por parte deles, ainda que possa parecer insuficiente, houve uma significativa mudança em interesse e postura, bem como na aquisição de conhecimentos frente aos problemas de geometria e ao seu processo de ensino-aprendizagem. Alguns alunos afirmaram que mesmo não gostando de geometria, foram motivados, inicialmente, apenas as 40 horas de atividades complementares ou estágios que poderiam considerar pela participação nas oficinas. Porém, no decorrer dos encontros, foram se envolvendo com o ambiente e seus materiais didáticos, como também nas reflexões e discussões geradas, que aquele desconforto ou insegurança que sentiam quando submetidos à resolução de qualquer problema que exigia algum conhecimento de geometria foi minimizado de tal forma que agora, diferentemente dos seus planos anteriores, passarão a ensiná-la quando estiverem atuando como professores da educação básica. Desta forma, mesmo não dispondo de ferramentas mais eficientes para avaliar se os objetivos foram totalmente alcançados, podemos garantir que houve uma transformação significativa na forma com que os participantes encaravam a Geometria e seu ensino.

## 5. Considerações finais

Consideramos que a abordagem de diferentes metodologias no processo de ensino-aprendizagem de matemática, em especial no caso da geometria, pode conduzir o futuro professor à obtenção de novas competências, que priorizam a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação e o espírito

crítico, além de favorecer a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia, considerados elementos primordiais à formação geral do professor de matemática.

No caso da construção do conhecimento em geometria, observamos a importância do aluno passar pelas etapas de manipulação, de visualização e representação plana de figuras geométricas planas e espaciais. Bem como da exploração de propriedades, da construção geométrica de planificações e da confecção de figuras espaciais com diferentes materiais. Desta forma, poderá levantar hipóteses, conjecturar e chegar à formalização dos conceitos. Nesta direção, destacamos o Laboratório de Educação Matemática como o ambiente ideal para que tudo isto possa acontecer. Porém, o professor precisa estar atento para que suas atividades não se tornem apenas visuais e manipulativas, sem o comprometimento com a formalização dos conteúdos, com a linguagem e com o rigor matemático, indispensáveis aos avanços da Matemática como uma ciência viva e em constantes transformações.

Destacamos ainda, que a falta de conhecimentos pode gerar insegurança e fazer com que o professor não dê a devida importância ao ensino de geometria e passe a abordá-la, de forma superficial, apenas para cumprir conteúdos pré-estabelecidos nos planos de ensino de Matemática e assim, levá-lo a privilegiar a abordagem de conteúdos de Álgebra e Aritmética.

## 6. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998.148p.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio**. – Brasília: MEC/SEF, 2000.109 p.

\_\_\_\_\_. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+: Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 2002.141p.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

\_\_\_\_\_. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem**

**em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006, v.1.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e Didática. As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.** São Paulo: Cortez, 2002.