



UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA NO ENSINO MÉDIO USANDO PLANILHA ELETRÔNICA

Gabriela Gimenes Pereira¹

Cristiana Andrade Poffal²

Cinthy Maria Schneider Meneghetti³

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Este trabalho tem o objetivo de apresentar duas atividades envolvendo números complexos e funções com variável complexa. Os exercícios propostos utilizam o software GeoGebra e sua planilha eletrônica, explorando as transformações que as funções complexas realizam em regiões construídas no plano de Argand-Gauss. A ideia desta proposta se deve a pouca ênfase dada aos Números Complexos no Ensino Médio, apesar da grande aplicabilidade e importância destes números. As atividades têm o objetivo de trabalhar com conceitos básicos dos Números Complexos e, então, aprofundá-los introduzindo o conceito de função de variável complexa, seguida de suas transformações. Apresentam-se as atividades e se relata a aplicação em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual.

Palavras Chaves: Matemática. Ensino Médio. Funções Complexas. GeoGebra.

Introdução

Este relato de experiência apresenta a proposta e aplicação de duas atividades relacionando Funções com Números Complexos. A finalidade é destacar a importância deste conteúdo e que é possível introduzir funções cujo domínio está contido no conjunto dos números complexos e suas transformações no Ensino Médio. As atividades foram realizadas com uma turma de segundo ano do Ensino Médio Politécnico, porém podem ser aplicadas em qualquer série do Ensino Médio tendo como pré-requisito o conteúdo de números complexos, ou seja, o ideal é que o professor trabalhe este conteúdo e suas aplicações antes de introduzir a atividade proposta.

É importante destacar que os números complexos em suas três formas de representação (algébrica, geométrica e trigonométrica) podem ser relacionados com outros conteúdos matemáticos, tais como Geometria Analítica, Trigonometria, estudo de Funções, entre outros. Infelizmente, este conteúdo tem recebido pouca ou nenhuma atenção no Ensino Médio.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) pode-se ler que os números complexos são tratados como parte flexível do currículo podendo ser ou não trabalhado nas escolas (PCNs), pois o conteúdo é visto erroneamente apenas como resolução de equações polinomiais.

¹ Mestre. FURG. ggimenespereira@gmail.com

² Doutora. FURG. cristianapoffal@furg.brE-mail

³ Doutora. FURG. cinthyaschneider@furg.br

O ensino dos números complexos vem sendo proposto em vários trabalhos que fazem relação destes números com outros conteúdos e áreas. Uma dessas propostas de ensino mostra como esses números são utilizados no estudo dos circuitos elétricos, com ênfase na corrente alternada CA, além disso, apresenta uma noção básica em relação à forma de estimar o consumo de energia elétrica em uma residência (CABANILLAS, 2016). Em Matos são apresentadas inúmeras aplicações dos números complexos em outros conteúdos matemáticos. Neste trabalho é feita a relação dos números complexos com Geometria Analítica, Trigonometria e Números Binomiais. (MATOS, 2017). Já em (TOBIAS, 2016) pode-se ver a relação dos números complexos com o conteúdo de Matrizes.

Além disso, outros trabalhos destacam a importância do ensino dos números complexos apresentando atividades alternativas para o ensino dos mesmos. Por exemplo, em (MELO, 2015), são apresentadas inúmeras atividades no software GeoGebra, onde o autor explora operações de soma, multiplicação, potenciação e radiciação com números complexos na forma algébrica e trigonométrica.

Além de toda a relação dos números complexos com outros conteúdos matemáticos, deve-se destacar a grande contribuição destes números para várias áreas, como para a Dinâmica dos Fluidos e Aerodinâmica, onde destaca-se que Nikolai Joukowski desenvolveu um método que possibilitou que engenheiros aeronáuticos fizessem estudos sobre aerofólios e sua influência na sustentação de aviões (SOUZA, 2013).

Na Engenharia Elétrica, esses números estão presentes em circuitos de corrente alternada, como as instalações elétricas residenciais, onde as grandezas elétricas são analisadas através dos números complexos, fato que facilita os cálculos envolvidos (DANTE, 2011). Outra aplicação são os Fractais, não apenas belas imagens, eles também são muito utilizados para descrever eventos caóticos, explicar fenômenos da natureza como o formato das nuvens, nos estudos de correntes e análises de impulsos elétricos nos nervos, tendões e demais regiões do corpo, entre outros.

Um grande defensor do ensino deste conteúdo é o matemático Elon Lages Lima que destaca:

Não se julgue, entretanto, que a importância dos números complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais. (LIMA, 1991, pg 31)

Além disso, encontra-se nos PCNs que o estudante deve identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e possíveis estratégias para resolvê-la.

(BRASIL, 2000). Logo, se o aluno possuir conhecimento das três formas de representação destes números (algébrica, geométrica e trigonométrica) poderá escolher qual a melhor opção para a resolução do seu problema.

Pretende-se com as atividades propostas, explorar as transformações que as funções cujo domínio está contido no conjunto dos números complexos realizam em uma figura dada, a fim de que os estudantes obtenham conclusões para casos mais gerais.

Além da relação com Geometria Analítica e Funções, as atividades propostas apresentam-se como uma alternativa para ser desenvolvida com os alunos, aprofundando o conteúdo de números complexos através do estudo das funções e suas transformações. Também deseja-se mostrar quão importante são as atividades alternativas e que as mesmas podem tornar assim as aulas mais atrativas e ampliar os conhecimentos e tomadas de decisões dos estudantes.

O uso das tecnologias tem como objetivo fazer com que, além de atrativas, as atividades desenvolvam outros aprendizados como o conhecimento e uso do software GeoGebra, o estímulo da visualização gráfica para uma melhor compreensão, a capacidade de conjecturar e generalizar definições e conclusões sobre o conteúdo e então despertar a curiosidade do estudante sobre os números complexos.

Este relato apresenta duas atividades que devem ser realizadas no GeoGebra, usando planilha eletrônica do próprio software. A primeira atividade é constituída de quatro exercícios e a segunda, composta por dois.

Relato da aplicação da atividade

A atividade proposta foi realizada em uma Escola Estadual de Ensino Médio que adota o Ensino Médio Politécnico e contempla um público de situação econômica diversificada. A atividade ocorreu em um único encontro com três aulas de 50 minutos no dia 10 de dezembro de 2016, um sábado. Para sua realização foi selecionada uma turma de segundo ano do Ensino Médio do turno da tarde e no dia compareceram vinte alunos.

O conteúdo de Números Complexos havia sido trabalhado com a turma no segundo trimestre do ano letivo, a partir do mês de agosto. Para a realização da atividade foram utilizados vinte netbooks. E a atividade foi realizada em duplas, porém cada estudante possuía o seu netbook.

No primeiro momento foi entregue o questionário de Avaliação do Perfil do Participante onde os estudantes deveriam preencher alguns dados pessoais e responder algumas perguntas, tais como, apreciação ou não pela matemática, dificuldades na disciplina, conteúdos

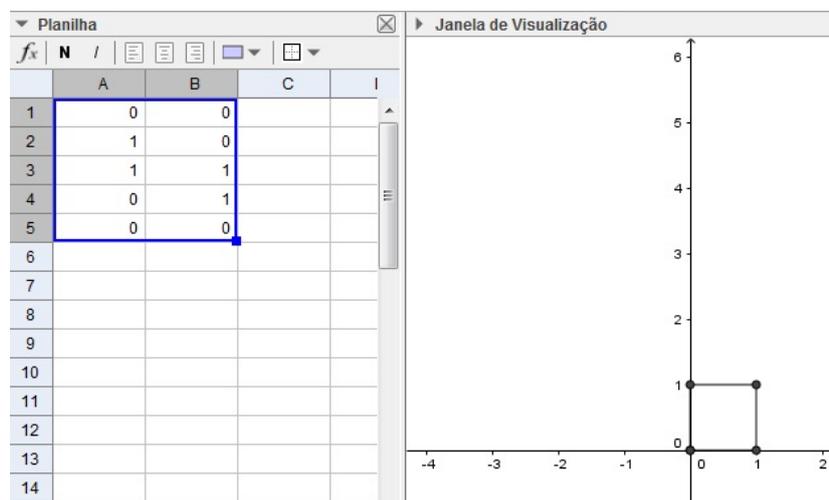
de Números Complexos que possuíam conhecimento, importância da matemática para sua formação, entre outras questões.

Após o preenchimento do questionário foi entregue a primeira atividade, onde solicitava-se que os estudantes abrissem a Planilha Eletrônica do GeoGebra e a Janela de Visualização 2. Neste momento foram apresentadas as funções das janelas e como usá-las. Além disso, foram exibidos alguns comandos do GeoGebra indispensáveis para as atividades, como, por exemplo, o Caminho Poligonal.

Nesta atividade foram sugeridos quatro exercícios que envolviam os números complexos tanto na forma algébrica como na forma de par ordenado e se utilizou mais de uma vez as transformações dos números complexos nessas duas representações. Também nesse momento, os estudantes realizaram cálculos envolvendo funções com variável complexa. As funções trabalhadas nestas questões eram do tipo $f(z) = az + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

A atividade solicitava que se transformassem alguns números complexos em par ordenado e em seguida, que fossem postos os valores da parte real e imaginária na Planilha Eletrônica. Utilizando esses valores e a ferramenta caminho poligonal se construía a figura formada pelos números na Janela de Visualização. Observe a Figura 1:

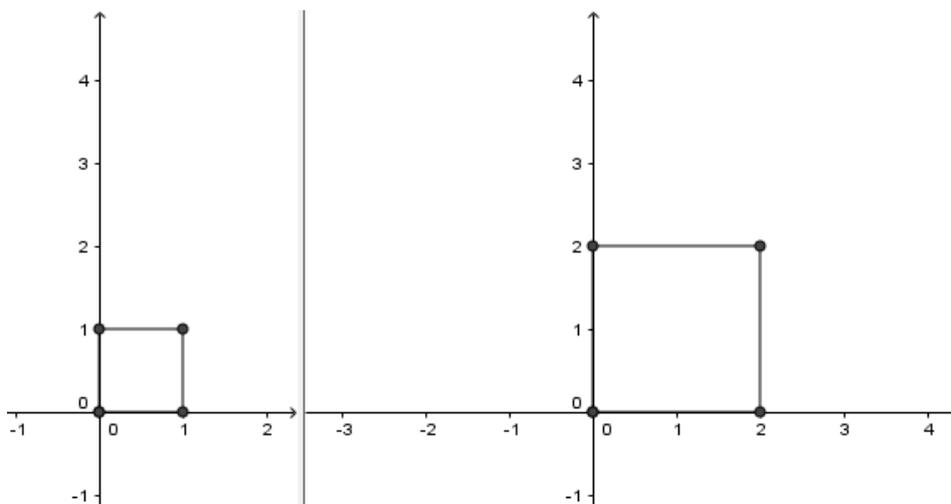
Imagem 1: Figura Inicial



Fonte: Autor

A figura formada era um quadrado, e então os estudantes aplicavam uma função nos números complexos iniciais e construía uma nova figura na Janela de Visualização 2. O primeiro exercício utilizou a função $f(z) = 2z$ e, então, formou-se um novo quadrado porém de dimensões maiores.

Imagem 2: Figura com dilatação



Fonte: Autor

Os próximos três exercícios envolviam as funções $f(z) = z + 2$, $f(z) = \bar{z}$ e $f(z) = 3z + 1$, proporcionando que os estudantes trabalhassem com outros tipos de transformações. Ao final de cada construção os alunos deveriam analisar as modificações ocorridas e fazer relações entre as duas imagens e a função aplicada. Esta atividade foi finalizada com um desafio onde os estudantes deveriam generalizar as transformações que as funções $f(z) = az + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ realizavam em uma determinada figura.

A segunda atividade era composta por apenas duas questões que envolviam funções do tipo $f(z) = az + b$, porém agora com $a, b \in \mathbb{C}$. As funções propostas foram $f(z) = z + i$ e $f(z) = iz$, e os alunos deveriam seguir as mesmas orientações da primeira atividade. Finalizou-se comparando as transformações destes dois exercícios com os anteriores do da atividade 1, destacando-se as diferenças quando a e $b \in \mathbb{R}$ e quando a e $b \in \mathbb{C}$.

Ao final foi entregue um segundo questionário, de a avaliação das atividades, onde foram realizadas perguntas sobre o tempo utilizado para a construção dos exercícios, a comunicação com a pesquisadora, o nível de dificuldade das questões, se a atividade agregou conhecimentos práticos e tornou o conteúdo de números complexos mais atrativo, além de solicitar que os estudantes citassem pontos positivos e negativos. A atividade realizada neste dia foi considerada parte integrante da avaliação dos estudantes.

Conclusão

Este trabalho apresentou a proposta e o relato de aplicação de duas atividades envolvendo números complexos e funções de variável complexa. Essas atividades foram

propostas com o uso do software GeoGebra, onde se explorou as transformações que algumas funções promovem em regiões retangulares no plano complexo.

Apresentou-se a importância do ensino dos números complexos, mostrando-se algumas aplicações e destacando-se a necessidade de os estudantes conhecerem várias formas de representação destes números. Pode-se notar que a recepção dos estudantes com as atividades foi muito positiva, onde a grande maioria considerou que as mesmas contribuíram para o aprendizado, além de torná-lo mais atraente. O encontro ocorreu em 3 aulas de 50min. O tempo foi suficiente, mas destaca-se que os estudantes já haviam estudado o conteúdo de números complexos durante o ano letivo, facilitando a realização de alguns cálculos.

Sobre o GeoGebra a grande maioria dos alunos não conhecia o software, apenas dois estudantes já haviam usado, porém isto não foi problema para o desenvolvimento da proposta. Com apenas alguns minutos de apresentação os alunos já estavam mexendo no programa.

Este trabalho representa uma tentativa de incentivar professores e alunos quanto ao ensino e aprendizado dos números complexos. O desejo foi de destacar a importância deste conteúdo, suas aplicações e mostrar como é possível aprofundar-se neste assunto utilizando uma atividade alternativa. Além disso, apresentar a importância do uso de tecnologias no ensino de matemática e a possibilidade de introduzir funções com variável complexa no ensino médio.

Pode-se perceber a necessidade que os alunos possuem de atividades alternativas que envolvam o uso de tecnologias, além de atividades que permitam que os próprios estudantes conjecturem suas próprias definições e conclusões de conteúdos matemáticos.

Com a realização destas atividades pode-se notar que os estudantes se sentiram mais confiantes com o conteúdo de números complexos, visto que esse assunto já havia sido estudado e estavam revendo o mesmo através das atividades. Outro destaque se deve a possibilidade que os alunos tiveram de visualizar as transformações geometricamente, tornando as transformações das funções algo claro. Além disso, as atividades permitiram que os estudantes conseguissem relacionar de forma rápida, na maioria dos casos, a lei da função com a transformação da região construída.

A construção deste trabalho permitiu o aprofundamento da teoria de números complexos. Foi possível trabalhar com um conteúdo de extrema importância e aprofundar tal assunto introduzindo funções de variável complexa e suas transformações. Além de usar uma tecnologia (GeoGebra), o que torna o aprendizado mais atraente. O retorno dos alunos através dos questionários foi de extrema relevância, pois ao analisá-los pode-se notar as dificuldades encontradas, o gosto por atividades alternativas e pelo uso de tecnologias, além da apreciação das atividades propostas pela grande maioria dos alunos.

Referências

BRASIL. PCNEM+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000. 9, 122 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 15.01.2017.

CABANILLAS, Aurelio C. Introdução ao Estudo dos Números Complexos e sua Aplicação aos Circuitos Elétricos. 73. Dissertação – PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São Luis, 2016.

LIMA, Elon. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. Rio de Janeiro: Copyright, 1991.

MATOS, Etinevaldo S. A. Números complexos na geometria e outras aplicações. 73. Dissertação - PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Salvador, 2017.

MELO, Ledinalvo G. de. Uma Abordagem Geométrica do Ensino dos Números Complexos. 109. Dissertação - PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Maceió, 2015.

SOUZA, Joamir. R. de. Matemática: Novo Olhar. São Paulo: FTD, 2013.

TOBIAS, Bruno. Estudo dos Números Complexos via Representação Matricial. 14. Dissertação – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São João Del-Rei, 2016.