UMA PROPOSTA DE ENSINO DE ARITMÉTICA MODULAR PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

Marco Antonio Di Pinto[1]

Elizabeth Magalhães de Oliveira [2]

Márcia Roberta dos Santos Pires da Silva [3]

Michel da Costa [4]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Este minicurso visa apresentar uma sequência didática para o ensino da aritmética modular na Educação Básica. Este estudo teve origem numa pesquisa exploratória e interpretativa onde se pode identificar as fragilidades e potencialidades do ensino de alguns conteúdos matemáticos que permeiam a aritmética modular. Esse cenário exploratório que permitiu a construção de nossa pesquisa, continha alunos de diversas faixas etárias, mais precisamente entre 12 e 17 anos. Percebeu-se ao trabalhar com esses alunos, a potencialidade dos mesmos para com a construção dos saberes associados a aritmética modular. É válido afirmar que nesse grupo de estudantes; na qual se construiu todo o nosso trabalho exploratório, as habilidades em matemática dos estudantes presentes excedem e muito a média de uma sala de aula qualquer do Ensino Médio. A pesquisa indicou que se faz necessário pensar em ampliar o campo conceitual dos conteúdos oferecidos na Educação Básica de modo a verificar se a matemática discreta pode ser inserida nesse contexto. Acreditamos que esse objeto de estudo, a saber, a matemática discreta, quando levada ao Ensino Médio, possa desenvolver nos educandos habilidades que os permitam criar conjecturas, para que os mesmos se sintam confortáveis em fazer abstrações, provocando assim argumentações de diferentes teor de escrita ou fala como tanto desejam nossos indicadores curriculares. À luz das teorias dos campos conceituais elaborou-se uma sequência didática composta por nove atividades as quais serão desenvolvidas pelos cursistas, organizados em equipes de até quatro componentes; atividades essas baseadas em nossa pesquisa já desenvolvida.

Palavras Chaves: Aritmética modular. Educação Básica. Campos Conceituais.

O ESTUDO INICIAL E O ENSINO DA MATEMÁTICA DISCRETA NA ESCOLA BÁSICA

Ao ministrar aulas para o ensino universitário observou-se alguns entraves que os assuntos de matemática discreta proporcionavam aos educandos. Porém, num trabalho desenvolvido com um grupo de alunos do Programa da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, verificou se que os jovens discutiam

[1] Mestre. UNIMES. marco.antonio@unimes.br

[2] Mestre. UNIMES. elizabeth.oliveira@unimes.br

[3] Mestre. UNIMES. marcia.silva@unimes.br

[4] Mestre. UNIMES. michel.costa@unimes.br

com relativa facilidade assuntos que giravam em torno da aritmética modular, sendo eles um grupo heterogêneo de diferentes níveis escolares e com um perfil especial, visto que são estudiosos da matemática e interessados nos conteúdos a nível de participarem de uma olimpíada competitiva.

Sendo assim, algumas questões passaram a nos incomodar, tais como: estaria a Educação Básica pronta para absorver conteúdos pertencentes a aritmética modular? Poderia esse conteúdo ser um pouco mais "explorado" do que realmente é na Educação Básica? Essas inquietações motivaram uma investigação sobre a possibilidade de ensino da aritmética modular no Ensino Fundamental ou Médio.

Segundo os PCNEM (2000) para o nível do Ensino Médio, os exercícios de indução e de dedução em matemática são importantes desenvolvedores da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica. Isso assegura a relevância para o aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.

Segundo Mattos (2011), o estudo de assuntos inerentes à teoria dos números favorece o desenvolvimento de ideias fundamentais da matemática, tais como: conjecturas, argumentações e demonstrações, além de ajudar os estudantes no entendimento conceitual da aritmética e da álgebra.

Conforme descrito em Pommer (2008), acredita-se que as manifestações, ações e constatações que possam constituir um repensar em relação à importância de propostas a serem desenvolvidas em sala de aula, envolvendo a aritmética modular.

De acordo com Jurkiewicz (2004), a matemática discreta viabiliza problemas de compreensão fácil e acessível, constituindo assim importante e poderosa ferramenta pedagógica que contribui para o processo de ensino e aprendizagem no ensino básico. O enfoque de conteúdos presentes no currículo do ensino básico e pertencentes a matemática discreta permite o desenvolvimento de habilidades como interpretar e conjecturar, assim como a busca de estratégias de resolução. Logo, se tem a necessidade de que essas habilidades fossem desenvolvidas para com os alunos da Educação Básica.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

O fato de investigar se temas adjacentes a aritmética modular possam vir a fazer parte da Educação Básica, e em qual momento eles possam ser explorados, vivenciados, nos leva a verificar o campo conceitual que embasa tais conhecimentos.

Segundo Vergnaud (1990), campo conceitual trata-se de um conjunto heterogêneo e informal de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados entre si e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. Acredita-se que a sequência didática é um dos procedimentos responsável pelo desencadeamento desse processo.

Desse modo, preparou-se uma sequência didática, que amplie o campo conceitual da aritmética modular, podendo ser capaz de desenvolver no educando habilidades que o permitam criar conjecturas, para que os mesmos se sintam confortáveis em suas argumentações. Zabala (1998) afirma que:

> Uma sequência didática como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos. A sequência didática dependerá da intervenção metodológica elaborada e do planejamento dos conteúdos a serem desenvolvidos. Toda intervenção metodológica é associada com "o que fazer" para obtermos melhores resultados de aprendizagem, ou seja, que tipo de atividade ou aula deve ser programada para a melhoria do ensino e, ainda, todo planejamento dos conteúdos é associado com o "como fazer" para que isto aconteça. O conteúdo é "tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidades." (ZABALA, 1998).

Nessa perspectiva, apresenta-se uma sequência didática composta por nove (9) atividades, cujas soluções devem ser encontradas pelos participantes organizados em equipes de até quatro (4) componentes. Ao desenvolver as atividades cada equipe deve anotar os procedimentos utilizados para solucionar os problemas e, ao final do trabalho, entregar um relatório.

Iniciamos, se assim podemos dizer, a nossa sequência didática com a noção de número que de certo modo se confunde com a noção de contagem. A noção da organização também.

A forma como se organiza os objetos, está sempre presente na aritmética modular, e acreditamos que essas discussões possam se fazer presentes na educação básica, pois essas discussões irão alimentar os jovens no sentido de produzirem abstrações, conjecturas, generalizações; levando a perceber regularidades a ponto de produzirem argumentações.

Acreditamos que essa maturidade algébrica, já se faz presente no Ensino Médio, apenas é pouco explorada, e dessa maneira, com o exame e exercícios de percepção dessas regularidades acreditamos que a sequência didática elaborada seja coerente com os objetivos que propomos.

Buscamos com essa pesquisa elementos que verifiquem que embora o estudo da aritmética esteja presente nos currículos do ensino obrigatório em todos os países, o mesmo não acontece com a aritmética modular.

No entanto, mesmo não fazendo parte da matemática “contemplada” nas salas de aulas em todos os níveis, acreditamos que a familiaridade dos estudantes para com alguns objetos que embasam essa discussão, seja um facilitador do processo de ensino e aprendizagem do objeto estudado, no caso a aritmética modular.

Nesse contexto, fazer uso do resto de divisões; fazer uso de múltiplos e divisores de um número, trabalhar com matrizes e determinantes num cenário um pouco mais amplo o qual os nossos jovens estão habituados a navegar; podem fazer com que as observações provenientes dessa sequência didática que estamos propondo, sirvam de indicadores para verificar se, se faz pertinente a inserção da aritmética modular na educação básica.

Cabe lembrar que de acordo com o PCNEM (2000):

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, de modo a formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade (BRASIL, 2000).

Conforme nos salientam o PCNEM, estamos preocupados em verificar quais as técnicas de resolução, ou seja, as estratégias que os alunos desenvolvem para apreender os objetos da aritmética modular.

> A Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de (BRASIL, 2000).

De um modo geral, nos preocupamos em verificar não apenas o campo conceitual, que o educando se utiliza para construir seu conhecimento sobre os assuntos que permeiam a aritmética modular, mas também verificar de que forma essa construção está sendo feita, e se através dela as capacidades de abstração, raciocínio, investigação, e análise se fazem presentes, de forma a poder fazer com que o aluno crie conjecturas sobre o objeto de estudo, não para que as ferramentas e ou objetos ora utilizados, sejam “demonstradas” com todo o rigor que a matemática como ciência exige, mas sim, com o intuito de que ele verbalize o que observa sobre o mesmo, de modo a visualizar regularidades que os permitam fazer conjecturas de modo a gerar “argumentações”, sobre esse mesmo objeto.

Para finalizar, antes de apresentar a nossa sequência didática, devemos lembrar que não apenas para os PCNEM (2000) como para nós pesquisadores um “argumento” ao contrário de uma “demonstração”, está muito mais vinculado à capacidade de justificar o que se pensa acerca do objeto de estudo, justificar o que se afirma sobre o mesmo, verificando a pertinência dos atos efetuados para mostrar o que se admite como verdadeiro ou falso, ao passo que a “demonstração” é algo muito mais rígido, estando esta, muito mais presa a uma lógica formal que o rigor por si só exige.

Acreditamos que a sequência didática elencada abaixo, irá permitir com que novas conjecturas sejam criadas, novas argumentações sejam feitas em relação ao objeto de estudo.

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Atividade 1: Exame de regularidades

1. Se hoje é sábado daqui a 31 dias será que dia da semana?
2. Se hoje é terça feira daqui a 12302 dias será que dia da semana?
3. Se estamos em abril daqui a 37 meses, em qual mês estaremos?
4. Se estamos em maio daqui a 2431 meses, em qual mês estaremos?
5. André, Beatriz, Carla e Daniel irão jogar boliche. Para saber qual deles será o primeiro a fazer a sua jogada, resolveram adotar o seguinte critério:
    - Cada um deles irá mostrar em uma das suas mãos uma quantidade de dedos que varia de zero a cinco dedos.
    - Caso a soma dos dedos mostrados pelos 4 amigos seja um número que dividido por 4 de resto zero, André será o primeiro a fazer a realizar sua

jogada no boliche. Caso o resto da divisão da soma dos dedos por 4 seja 1, o jogo será iniciado pela Beatriz. Caso o resto da divisão da soma dos dedos por 4 seja 2, o jogo será iniciado por Carla e, caso o resto divisão da soma dos dedos por 4 seja 3 o primeiro a fazer a sua jogada no boliche será Daniel.

De acordo com essas informações e sabendo que a soma dos dedos mostrados pelos 4 amigos foi 17 podemos dizer que o jogo de boliche será iniciado por quem?

Atividade 2: Trabalhando com números naturais

Efetuar as divisões em N

a. 8342 por 20
b. 671 por 19
c. 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11 por 8
d. [5! + 31] por 4

Atividade 3: Trabalhando com números inteiros

Dividir em Z

a. 23 por 7
b. 82 por 11
c. (-37) por 5
d. (-39) por 6
e. 24 por (-7)
f. 31 por (-11)
g. (- 37) por (-5)
h. (- 68) por (- 7)

Atividade 4: Trabalhando com o resto das divisões em Z_m.

1) Trabalhando apenas com números inteiros, quais os possíveis restos numa divisão por 3?

2) Trabalhando apenas com números inteiros, quais os possíveis restos numa divisão por 4?
3) Construir as classes de restos de $\mathbb{Z}_3$ e fornecer 5 elementos positivos e 5 elementos negativos de cada classe de resto mod3.
4) Construir as classes de restos de $\mathbb{Z}_4$ e fornecer 5 elementos positivos e 5 elementos negativos de cada classe de resto mod4.

Atividade 5: Trabalhando com tábuas de operações.

1) Construir as tábuas de operação de cada estrutura algébrica abaixo:

$a)\ (\ Z_3\ ;\ +\ )$

$b)\ (\ Z_3\ ;\ .\ )$

$c)\ (\ Z_4\ ;\ +\ )$

$d)\ (\ Z_4\ ;.\ )$

$e)\ (\ Z_5\ ;.\ )$

$f)\ (\ Z_8\ ;.\ )$

Atividade 6: Resto de divisões em Zm

1) Determinar o resto da divisão de $(\ 584^{38}\ .\ 26^{17}\ )\ \text{mod}\ 6$
2) Determinar o resto da divisão de $(\ 841^{77}\ .\ 21^{10}\ +3)\ \text{mod}\ 6$

Atividade 7: Trabalhando com o inverso multiplicativo

1) Qual é o inverso multiplicativo do $\underline{3}$ no $\mathbb{Z}_5$?
2) Qual é o inverso multiplicativo do $\underline{7}$ no $\mathbb{Z}_9$?
3) Qual é o inverso multiplicativo do $\underline{6}$ no $\mathbb{Z}_8$?
4) Qual é o inverso multiplicativo do $\underline{6}$ no $\mathbb{Z}_7$?

Atividade 8: Codificação de mensagem

1) Seja o sistema de trocas e a matriz de codificação abaixo ambas construídas no $\mathbb{Z}_7$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

B	A	L	M	E	O	S
0	1	2	3	4	5	6

Codificar a palavra BOLA nessa estrutura.

2) Seja o sistema de trocas e a matriz de codificação abaixo ambas construídas no $\mathbb{Z}_9$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

M	S	E	A	R	T	I	O	C
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Codificar a palavra RAMO nessa estrutura.

Atividade 9: Decodificação de mensagens

1) Decodificar a palavra OMBE se utilizando da matriz de codificação e do sistema de trocas abaixo no (mod 7)

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

B	A	L	M	E	O	S
0	1	2	3	4	5	6

2) Decodificar a palavra OMIC se utilizando da matriz de codificação e do sistema de trocas abaixo no (mod 9)

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

M	S	E	A	R	T	I	O	C
0	1	2	3	4	5	6	7	8

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROS, M. A. O. **Aritmética Modular: Aplicações no Ensino Médio.** Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM, 2014.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **PCN+: Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 2000.

JURKIEWICZ, S. **Matemática Discreta e Ensino Médio**. Programa de Engenharia de Produção da UFRJ, Rio de Janeiro, 2004. Disponível em: <http://ensino.univates.br/~chat/Materiais/matdiscreta_medio.pdf>.

MATTOS, S. R., PUGGIAN, C. e LOZANO, A. R. G. **Aritmética modular e suas possibilidades na formação continuada de professores de Matemática**. XIII CIAEM-IACME, Recife, 2011.

SÁ, I. P. **Aritmética modular e algumas de suas aplicações.** Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfFgoAK/congruencia-mod>.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares: Um desafio motivador para alunos do Ensino Médio.** Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUCSP, 2008. Disponível em:<https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11292/1/Wagner%20Marcelo%20Pommer.pdf>.

SILVA, V. A. e FRIEDMANN, C. V. P. **Congruência Módulo em Aritmética Modular: Conceitos, Resultados e Aplicações.** Rio de Janeiro. Disponível em: <www2.unigranrio.br/recursos/documentos/IC/41IC.pdf>.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels.** Récherches en Didactique des Mathématiques , 1990, v.10/2.3.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: como ensinar.** Tradução Ernani F. F. Rosa. Porto Alegre, ARTMED, 1998.