A UTILIZAÇÃO DE SOFTWARES NO CÁLCULO DE VOLUMES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Cristiane Machado Pereira Felício [1]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Este trabalho expõe um experimento utilizando uma aplicação de integrais definidas especificadamente a do volume de um 'sólido de revolução'. Relata uma atividade desenvolvida com acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática do IFC-Camboriú, na disciplina de Introdução a Análise Real. A atividade prática consiste em desenvolver uma sequência didática envolvendo o cálculo do volume de um sólido de revolução. Para isso, utilizou-se três softwares livres: Graph, na determinação da curva de contorno e Winplot, tendo em vista a visualização do sólido e o Dev C++ para o cálculo do volume de um 'sólido de revolução. Também contou com o aporte das definições da área de uma superfície de revolução e o comprimento da curva dada em forma paramétrica. A interação entre tecnologia e os registros teóricos no quadro, sendo ingredientes para a aprendizagem dos participantes, proporcionou momentos de diálogo, reflexão e discussão interligando teoria e prática. Vê-se que o ensino da matemática urge pelo incremento de novas práticas pedagógicas com o intuito de tirar do professor a ideia de que exclusivamente por sua ação verbal conseguirá promover um aprendizado significativo.

Palavras Chaves: Matemática. Integral. Aplicações e Softwares.

1. INTRODUÇÃO

Este artigo propõe um experimento para os acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, vivenciado na disciplina de Introdução a Análise Real, tendo a finalidade de apresentar uma atividade envolvendo alguns conceitos do volume de sólidos de revolução e uma aplicação prática de integrais definidas.

A proposta foi que os estudantes participassem efetivamente da apresentação da prática. No primeiro momento foram apresentados os conceitos de volume para um sólido de revolução em torno do eixo x e y e de um sólido qualquer.

No cotidiano de nossas atividades acadêmicas nos deparamos com inúmeras definições e demonstrações que geram situações onde nos questionamos sobre a importância em aprender certos conteúdos e qual a sua aplicação, nem sempre conseguindo encontrar uma resposta.

[1] Acadêmica. Instituto Federal Catarinense. cristianemachadop@hotmail.com

Visando oportunizar uma abordagem diferenciada para o ensino de sólidos de revolução, durante o desenvolvimento e a execução das atividades, os acadêmicos transformaram os conceitos aprendidos em um experimento prático.

Neste trabalho se almeja mostrar que além da aplicabilidade de integrais definidas, é necessário romper com a forma conservadora de ensinar esses conceitos, e também, com o auxílio tecnológico pode-se desfrutar o uso de softwares.

2. APRESENTAÇÃO DO TEMA

Os computadores estão sendo introduzidos de forma cada vez mais frequente em todos os níveis da educação. Sua utilização no ensino superior pode ter várias finalidades, tais como: fonte de informação; auxílio no processo de construção de conhecimento; um meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções.

Para esta aplicação foram utilizados três softwares livres: o Winplot, o Graph e o Dev C++.

O software Winplot foi utilizado para que os acadêmicos visualizem o seu sólido em três dimensões. Segundo Silva (2012, ?):

> O software winplot é um excelente programa gráfico, desenvolvido e administrado pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy. Trata-se de um programa inteiramente gratuito e interativo, que facilita o estudo de funções, simples de usar, pois aceita as funções matemática de modo natural, utiliza pouca memória e dispõe de outros vários recursos. Apresentando um dinamismo que contribui significativamente para o ensino de funções.

O software Dev-C++ foi utilizado para calcular o volume do sólido de revolução. O Dev-C++ engloba num único aplicativo todas as ferramentas necessárias para programar em C/C++. O pacote compõe um ambiente completo de desenvolvimento para a criação, debug e compilação do código de programação.

A aparência do Dev-C++ segue a tradição dos programas do gênero. A maior porção da tela está disponível para a edição de texto.

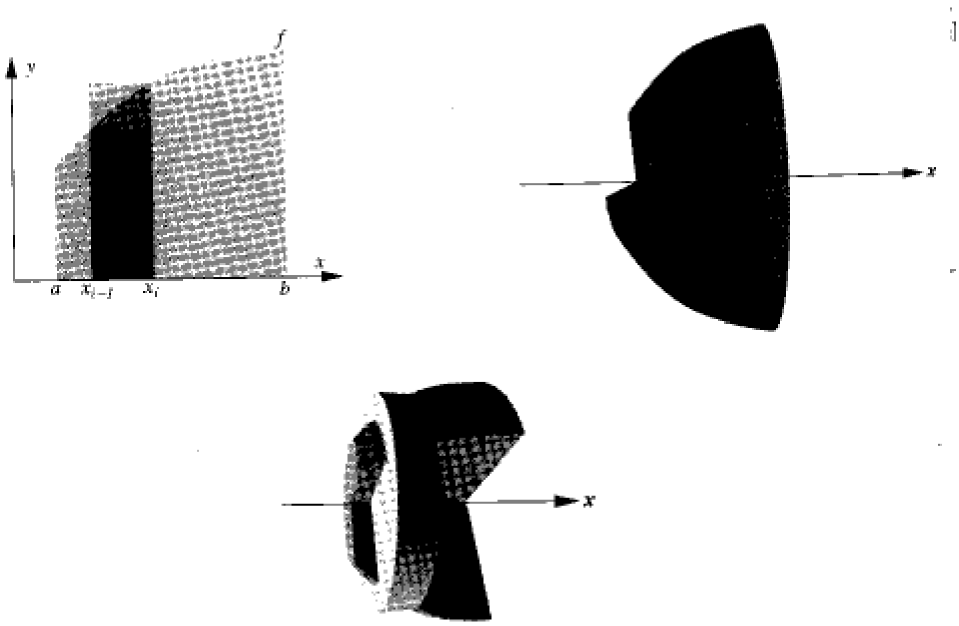
O software Graph foi utilizado no experimento para encontrar a curva de contorno. A interface do aplicativo é muito simples e disponibiliza botões para realizar operações básicas com apenas um clique. O Graph trabalha com funções padrão, paramétricas e polares.

3. CONCEITOS

3.1 Volume de sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, de um conjunto a

Seja f contínua em [a,b] com *f (x)* ≥ *0*, em [a,b] seja B o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo *x,* do conjunto A do plano limitado pelas retas *x* = *a* e *x* = *b* pelo eixo *x* e pelo gráfico de *y* = *f (x).* Estamos interessados em definir o volume de V em B.

Figura 1: Rotação em torno do eixo x.



Fonte: Guidorizzi (2010).

Seja *P = a = x0 < x1 < x2 < ... < xi−1 < xi < ... < xn = b* uma partição de *[a,b]* e, respectivamente, c_i e c_{i2} pontos de mínimo e de máximo de *f* em [x_{i-1} , x_i]. Na figura a cima, c_i =x_{i-1} e c_{i2} = x_i . Temos: *π[f (*c_i*)]²*$\Delta\, x_i$ = Volume do cilindro de altura Δx_i e base de raio *f (*c_i *)* (cilindro de "dentro"). *π[f (*c_{i2}*)]²*$\Delta\, x_i$ = Volume do cilindro de altura Δ*xi* e base de raio *f (*c_{i2} *)* (cilindro de "fora"). Logo a definição do volume de V deverá implicar:

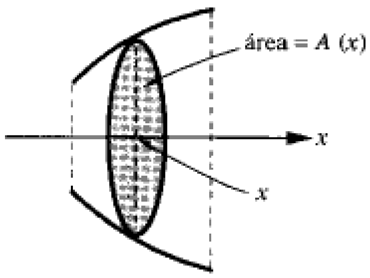
$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\pi}\,[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c_i})]^2\Delta\boldsymbol{x_i} \leq \boldsymbol{Volume} \leq \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\pi}\,[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c_{i2}})]^2\Delta\boldsymbol{x_i}$$

Para toda partição *P* de *[a,*b]. Para máx $\Delta \boldsymbol{x_i} \to 0$, as somas de Riemenn que comparecem nas desigualdades tendem a $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$, deste modo o volume V de B é definido por: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ ou $V = \pi \int_a^b y^2 dx$, onde *y = f (x)*

3.2 Volume de um sólido qualquer

Temos que $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ é a fórmula que nos fornece o volume do sólido de revolução obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto *A = {(x, y) ∈ R² |a≤ x≤b,0≤y≤f (x)}.* Observe que *A(x) = π[f (x)]²* é a área da interseção do sólido com o plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto de abcissa x.

Figura 2: Sólido de Revolução



Fonte: Guidorizzi (2010).

Assim, o volume mencionado anteriormente pode ser colocado na forma

$$V = \pi \int_a^b A(x) dx.$$

Seja, agora, B um sólido qualquer, não necessariamente de revolução e seja *x* um eixo escolhido arbitrariamente. Suponhamos que o sólido esteja compreendido entre dois planos perpendiculares a *x*, que interceptem o eixo *x* em *x* = *a* e em *x* = *b*. Seja *A(x)* a área da interseção do sólido com o plano perpendicular a *x* no ponto de abcissa *x*. Suponhamos que a função *A(x*) seja integrável em *[a,b]*. Definimos, então, o volume do sólido por.

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

4. APLICAÇÃO

A proposta desta aplicação, consiste em realizar o cálculo do volume, através da rotação de uma curva representativa de contorno do mesmo, girando-o em torno de um eixo fixo. Para a realização deste experimento, escolheu-se uma embalagem, possível de ser medida em seu diâmetro e sua altura conforme Figura 3.

Figura 3: Sólido escolhido – embalagem de fermento

Fonte: KRAISIG, 2014.

Na sequência os estudantes realizam as medidas, utilizando para isso o paquímetro. Durante a atividade foram necessários três softwares: Graph, Winplot e o Dev-C++, o Graph foi utilizado para a obtenção da curva de contorno mais adequada, enquanto o Winplot mostrou o sólido, o Dev-C++ o cálculo do volume através da integral definida.

4.1 Curva de contorno

Com utilização do paquímetro e de uma fita métrica os acadêmicos obtiveram a medida do sólido escolhido, e a cada meio centímetro de altura eles encontraram a medida do diâmetro, determinando o raio em cada uma destas alturas. Para obter melhor precisão, as medições foram realizadas pelo menos duas vezes.

A seguir os resultados dessas medições foram organizados em tabelas. Foram obtidos 12 pontos do 0 ao 5,5. A Tabela 1 destaca a síntese dos resultados coletados.

Tabela 1: Medidas do Objeto

Altura (cm)	**Diâmetro** (cm)	**Raio** (cm)
0,0	5,55	2,77
0,5	5,42	2,71
1,0	5,30	2,65
1,5	4,80	2,40
2,0	4,89	2,44
2,5	4,91	2,45

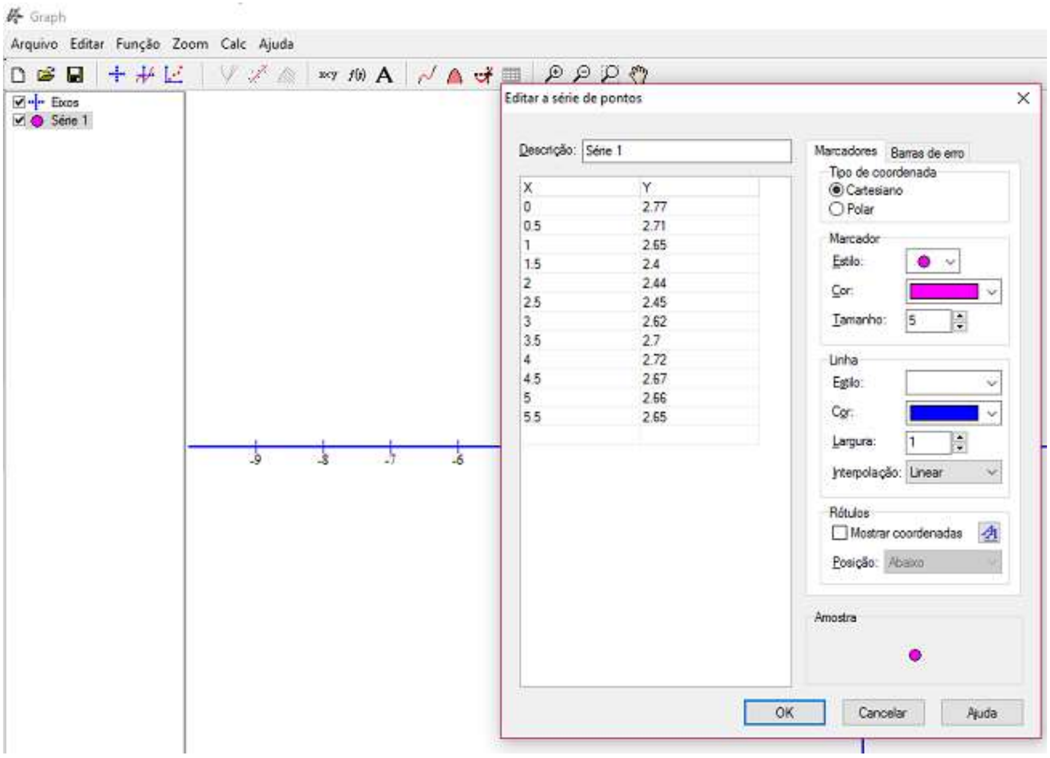
Fonte: Registros dos autores.

Com os dados já registrados, o próximo passo foi determinar a curva de contorno mais adequada para o sólido.

Para encontrar a curva de contorno, foi necessário o uso de um software que permite a escolha da curva de contorno que melhor descrevesse os dados obtidos nas medições, apresentando o modelo matemático que determina esta curva. Os participantes constataram que geralmente estes modelos apresentam coeficientes não exatos, tornando-se bastante trabalhoso obtê-los manualmente.

O software Graph foi utilizado para encontrar a curva de contorno que melhor descreve os dados obtidos nas medições e, que apresente a função que determina esta curva.

Figura 4: Inserção dos pontos

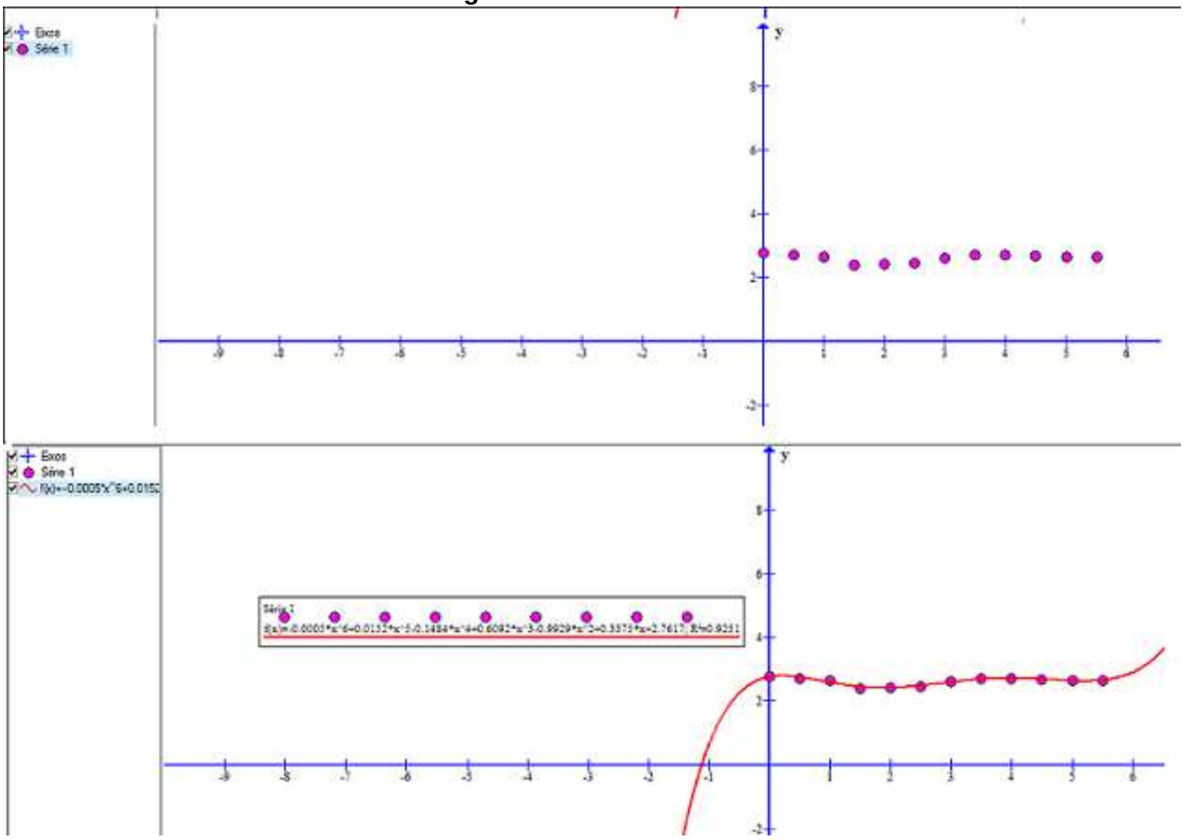


Fonte: Dados primários (2016).

No Software Graph foram inseridos os dados do sólido e, para isso, os acadêmicos seguiram os seguintes passos: acessar o menu Função; marcar Inserir Série de Pontos; e, seguir as orientações que são apresentadas pelo software, que indica onde deverão ser digitados os dados do sólido.

Estabeleceu-se a 'variável x' representativa da altura e, 'y a variável' representativa do raio. O software Graph foi utilizado para encontrar a curva de contorno que melhor descreve os dados obtidos nas medições e, que apresente a função que determina esta curva. Após inserir as informações referentes às medidas encontradas no sólido e clicar em ‘OK’, aparecerá na tela à distribuição dos pontos conforme a Figura 5.

Figura 5: Curva de contorno



Fonte: Dados primários (2016).

Para realizar a escolha da curva de contorno deve-se acessar o menu do software em Função e escolher a opção Inserir linha de tendência. Neste momento realizou-se uma discussão sobre o tipo de curva que deveria ser escolhida de forma que, melhor representasse os dados do sólido desejado.

Neste caso, a curva escolhida foi a polinomial de ordem seis, pois é fácil perceber que a distribuição dos pontos se assemelha a uma curva representativa de uma função de sexta ordem. Uma acadêmica sugeriu ao grupo para utilizar uma curva exponencial, sendo aceito por todos; porém, observou-se por meio do software que não seria viável, porque a curva exponencial não era compatível com a curva do objeto.

A escolha e a determinação do modelo a partir do software se tornam bastante rápida e eficiente, podendo ser alterada quantas vezes for necessário, até chegar ao melhor modelo. Essa linha de tendência gerou a seguinte função *f(x)* = *−0.00050980392∗x^6 +0.015226244∗x^5 −0.14840875∗x^4 + 0.60920489∗x^3 −0.99289577∗x^2 +0.33745518∗x +2.7117251.*

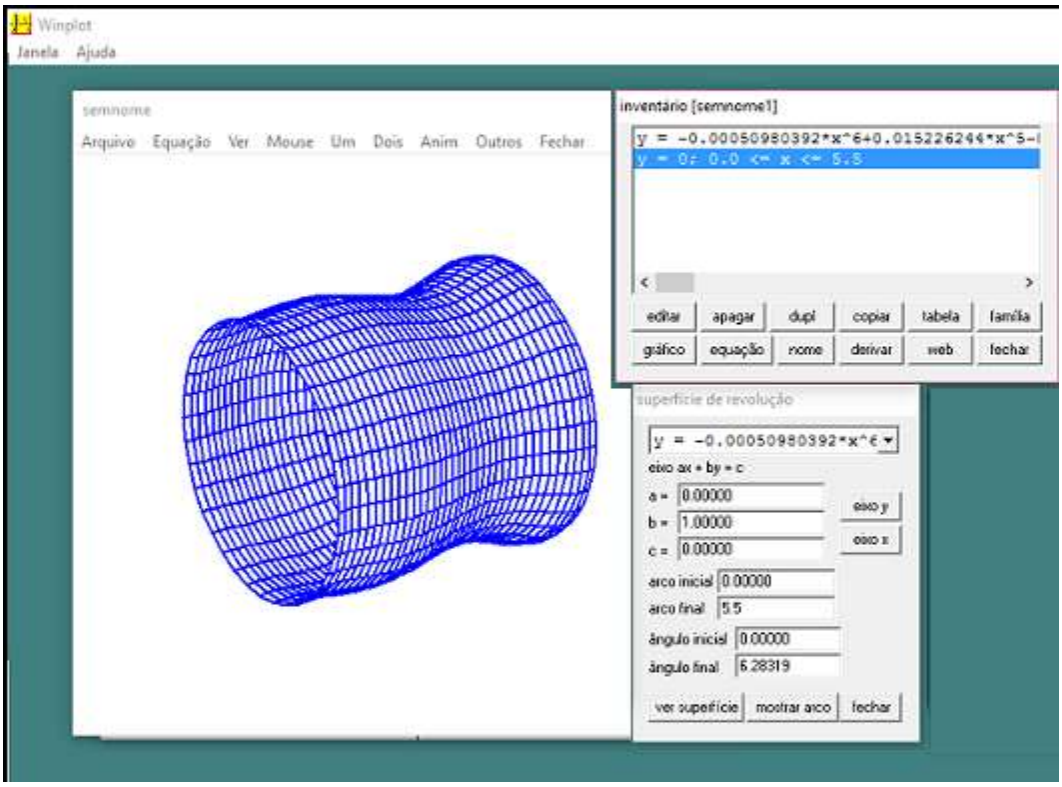
4.2 Cálculo do volume

Para o cálculo do volume do sólido considerou-se que a região limitada entre a curva e o intervalo de ‘0 a 5,5’ faz uma revolução em torno de um eixo fixo, neste caso o eixo *x*. Deste modo, o volume do sólido gerado foi calculado pela equação

$$V = \pi \int_{0}^{5.5} [(x)]^2 dx$$

onde f(x) é a função encontrada no software Graph e o intervalo de integração [0,5.5] foi determinado nas medições que corresponde a altura considerada no objeto. O software Winplot gera a curva de contorno a partir da *f(x),* e também possibilita gerar a superfície de revolução, mostrando com boa aproximação o formato do sólido como está sendo mostrado na Figura 6.

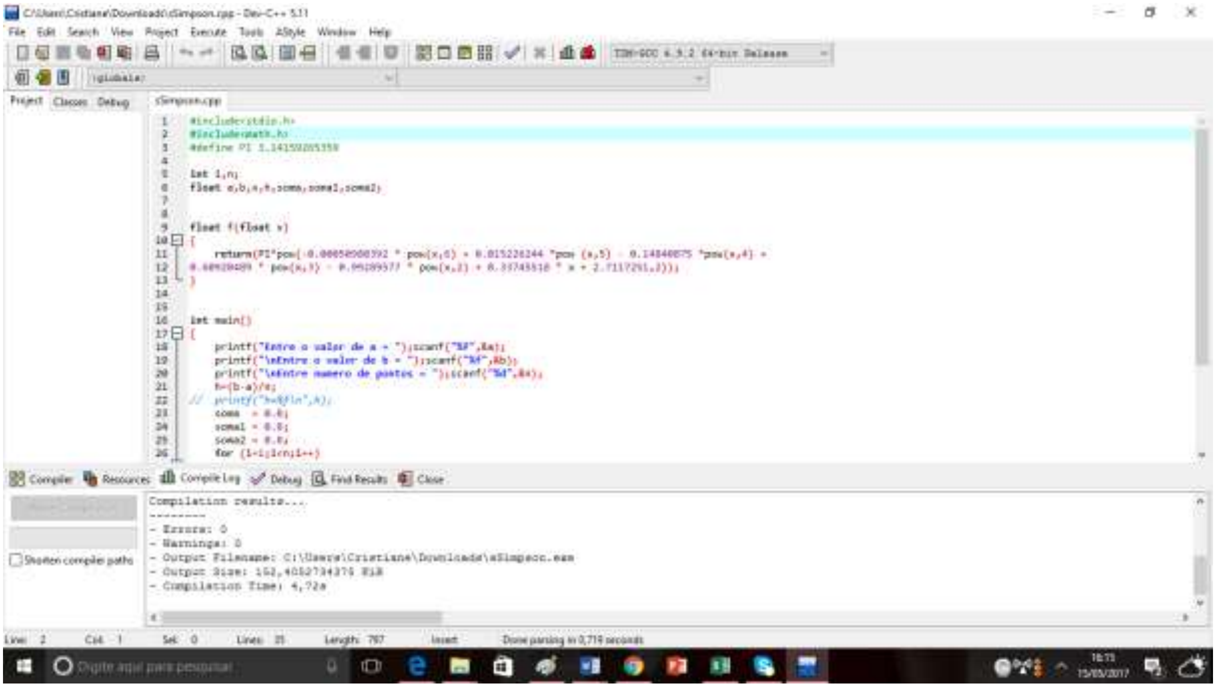
Figura 6: Sólido no software Wimplot



Fonte: Dados primários (2016).

Para calcular o volume do sólido de revolução foi utilizado o software Dev-C++; neste software, utilizamos um algoritmo como mostra na Figura 7.

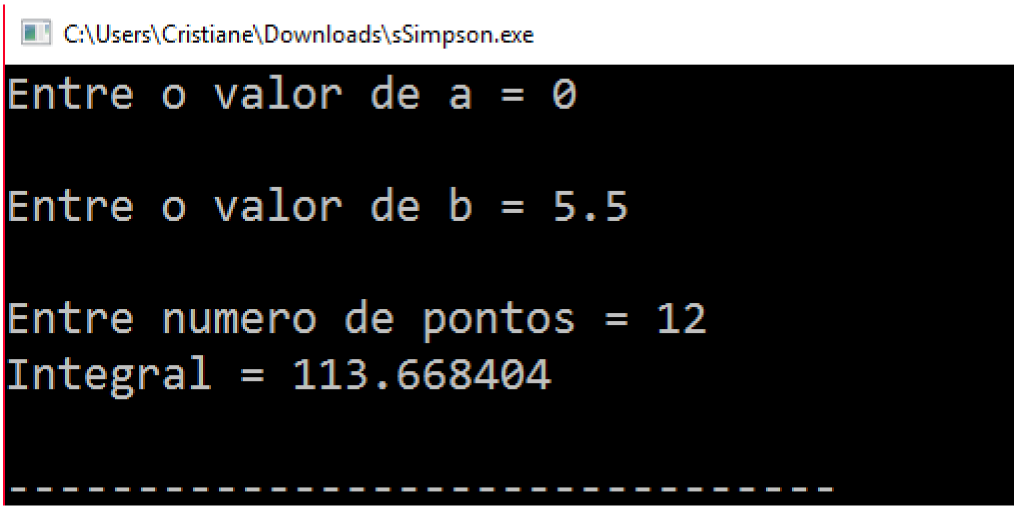
Figura 7: Algoritmo para cálculo do volume



Fonte: Dados primários (2016).

Para marcar o intervalo de integração, utilizou-se o intervalo de '0 a 5,5' conforme mostra a Figura 8.

Figura 8: Algoritmo compilado



Fonte: Dados primários (2016).

O volume do sólido foi calculado através da resolução da integral. Utilizando o software encontramos um volume de 113.66 cm^3, como a f(x) é um polinômio de sexto grau, pode-se também calcular manualmente o volume do sólido.

5. Considerações finais

Independentemente da atividade que realiza, o que move o homem são as necessidades, e elas só se efetivam quando ao encontrarem sua determinação no objeto, tornam-se os motivos que o impulsionam.

Ao considerar que o objeto da prática pedagógica deve ser a transformação do indivíduo no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes construídos por um coletivo, atenta-se para a prática do professor buscando compreender quais as necessidades ‘da disciplina / do conteúdo / do estudante’ ele tem procurado satisfazer.

Tendo esta preocupação, no desenvolvimento do trabalho existiu a motivação para a aprendizagem dos participantes, considerando a importância da atividade e participação de envolvidos. A atividade proporcionou um ambiente de estudo mais atraente, sendo vivenciada a aproximação do arcabouço teórico com a vivência prática, seguindo todas as etapas para a obtenção dos dados finais.

O cálculo da integral para muitos acadêmicos dos últimos períodos do curso já não é tão complexo como para os iniciantes, o que dificulta a aprendizagem muitas vezes são situações problemas onde o acadêmico tem que visualizar sólidos em três dimensões desenhados no quadro, sem utilizar a tecnologia (os softwares).

A interação entre a tecnologia e os registros teóricos no quadro, sendo ingredientes para a aprendizagem dos participantes, proporcionou momentos de diálogo, reflexão e discussão interligando teoria e prática. Vê-se que o ensino da matemática urge pelo incremento de novas práticas pedagógicas com o intuito de tirar do professor a ideia de que exclusivamente por sua ação verbal conseguirá promover um aprendizado significativo.

Segundo Kraisig (2014) é importante a realização de atividades como essas, para construir juntamente com os acadêmicos conceitos matemáticos ou simplesmente relembrá-los. Atividades como esta, fazem com que os estudantes consigam perceber que uma situação matemática vai além do caderno e encontra aplicabilidade em situações que a requerem.

Enfim, este trabalho se mostrou eficiente tanto no desenvolvimento do conteúdo como para mostrar a sua real importância.

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**: v.1, 5. ed. São Paulo: LTC, 2010.

KRAISIG, A. R.; WELTER, F. C. **Cálculo do Volume de um Sólido de Revolução:** uma atividade usando os softwares Graph e Winplot. In: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. p. 13-16, nov. 2014.

PIVA, C.; DORNELES, L.; SPILIMBERGO, A. P. Cálculo do Volume de um Sólido de Revolução: Uma Atividade Usando os Softwares Graph e WxMaxima. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 33., Águas de Lindóia, 2010. **Anais do CNMAC - ST17-Ensino**. Águas de Lindóia: SBMAC, 2010. p.137 (ou 137 p., ou vai da p.137 até ....)

SILVA. C. Adriano; SANTOS, V. Luciana; Soares, A. Willames. Utilização do Winplot como software educativo para o ensino de matemática. UPE-Campus Garanhuns; **Revista Diálogos n.°6 – Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade** – UPE/Faceteg – Garanhuns/PE – 2012. 187 p.