UMA PROPOSTA DE ENSINO SIGNIFICATIVO DE CÁLCULO DE ANTIDERIVADAS E INTEGRAIS BASEADA EM SITUAÇÕES-PROBLEMA

Pedro do Nascimento Nobrega[1]

Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: Neste minicurso propomos uma abordagem significativa das primitivas e integrais no primeiro curso de Cálculo baseada em situações-problema que generalizam temas trabalhados no Ensino Médio. O exemplo paradigma é o cálculo da área sob o gráfico de uma função contínua, que generaliza o cálculo de áreas de figuras planas. Depois de discutir e resolver esta situação-problema, proporemos aos participantes outras situações-problemas, para que sejam resolvidas em grupos, pelo mesmo procedimento do exemplo paradigma, indicando qual situação-problema do Ensino Médio elas estão generalizando. Motivados pelas técnicas utilizadas, que só empregam noções já estudadas pelos alunos no próprio curso de Cálculo, na segunda parte do minicurso é feita uma apresentação de uma integral simples, suficiente para resolver as ``aplicações'' usuais apresentadas nos textos. Segue-se um breve relato história do método empregado por J. Fourier para resolver a equação do calor. A área sob o gráfico de uma função reaparecerá com força nova, como instrumemento fundamental *para a criação de novas funções*.. Como é sabido, o movimento de fundamentação do Cálculo em bases riogorosas, demandando a reformulação de conceitos, teve muitas raízes no trabalho de Fourier. A Terceira, e última, parte do curso inicia com uma discussão coletiva de um texto, postado numa rede social, a respeito da necessidade de tantas disciplinas sofisticadas e difíceis na grade curricular dos futuros professores.

Palavras Chaves: Ensino significativo. Antiderivadas. Situações-problema. Integral de Newton.

Justificativa

Normalmente, no primeiro curso de Cálculo, após estudar limites, continuidade e derivação de funções de uma variável real, o estudante começa a aplicar os conhecimentos recém adquiridos. São vistas algumas “aplicações”, em geral ao estudo da variação de funções, esboços de gráficos e problemas simples de otimização. Segue-se o estudo de antiderivadas e integrais ``de Riemann'', nesta ordem. Este é o encaminhamento dado, por exemplo, por J. Stewart, no primeiro volume de sua coleção de Cálculo. Concordamos com o posicionamento do tema ‘antiderivadas’ na sequência de conteúdos apresentada anteriormente. Inclusive, no que se refere às integrais, que elas aparecem associadas ao cálculo de áreas sob o gráfico de funções contínuas, apesar de não ser a única motivação possível. Inclusive vamos seguir este mesmo caminho.

Porém sustentamos neste curso que a apresentação usual das integrais não é motivada de modo significativo, e, principalmente, já apresenta um modelo bastante

[1] Mestre em Matemática. Professor da Universidade Federal Fluminense. E-mail: pn@im.uff.br

sofisticado de integral, a integral de Riemann, que termina por obscurecer um papel essencial da integração, que é o de *criar novas funções*.

Além disso a abordagem "tradicional'' se apoia em construções, senão vagas, pelo menos obscuras, com destaque para a exigência de que *o limite das somas seja independente da escolha de partições pontilhadas*, o que não é nem um pouco intuitivo. Isto pode ser um sério obstáculo à aprendizagem significativa, um elemento de afastamento que não favorece um aprendizado, e que contribui bastante para a retenção dos alunos nos primeiros períodos; e mesmo para a evasão escolar.

Neste minicurso será proposta uma contribuição intermediária à prática do professor do primeiro curso de Cálculo Integral, através da reintrodução da Integral de Newton. Para alcançar este objetivo, partiremos do conceito de primitivas, motivado por situações-problema que têm a dupla característica de serem generalizações de situações-problema trabalhadas no Ensino Médio e de levarem, de modo natural, à Integral.

Nos apoiaremos na Teoria de Cognição de David Ausubel (1982) cuja ideia central é a de que o fator isolado mais importante influenciando a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, isto é, ele propõe que os conhecimentos prévios dos alunos sejam amplamente valorizados. O conceito mais importante em sua teoria é o de *aprendizagem significativa*. Segundo MOREIRA E MASINI (p.7):

> aprendizagem significativa é um processo no qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. (...) A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos relevantes pré-existentes na estrutura cognitiva de quem aprende. (MOREIRA,MASINI, 1982).

Outro pilar teórico deste minicurso é Teoria dos Campos Conceituais definida por Gérard Vergnaud (1983) como um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes mas intimamente relacionados. Nesse enfoque, um novo conceito, ao ser construído, passa a fazer sentido para o sujeito através das situações e dos problemas a resolver. Esse conjunto de problemas e situações requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados.

A proposta deste minicurso é apresentar uma teoria de integrais que se apoie nas ideias dos teóricos citados, e tendo como meta principal a ressignificação do conceito integral como uma ferramenta essencial para a construção de novas funções.

A história das séries de Fourier é muito ilustrativa desse papel essencial das antiderivadas e das integrais. Os coeficientes das séries de Fourier, que são indispensáveis para modelar situações-problema mais complexas, como, por exemplo a Teoria de Sinais em Telecomunicações, podem ser apresentadas aos alunos como generalizações de situações-problema estudadas no Ensino Médio.

Acreditamos que esta abordagem ajuda a diminuir a evasão e os índices de abandono e reprovação no primeiro cursos de Cálculo. Subsidiariamente os participantes perceberão a necessidade de se valer das ferramentas mais poderosas do Cálculo, para prosseguir em seus estudos, iniciados no Ensino Médio, e sem perder o foco na contextualização dos problemas.

Desenvolvimento

O minicurso, terá carga horária de 3 horas. As atividades serão organizadas da seguinte maneira:

1. Apresentação da situação problema do cálculo de áreas sob gráficos de funções contínuas e não negativas em Intervalos. Lima (1985, p.iii) afirma que “As noções de comprimento, área e volume estão entre as mais antigas da Matemática. Elas figuram com destaque nos “Elementos” de Euclides e têm sido assunto obrigatório nas escolas, há séculos”. Concordamos com essa constatação que, além de tudo, segue o fio da História.

2. Construção do conceito de Primitiva, através da solução da seguinte

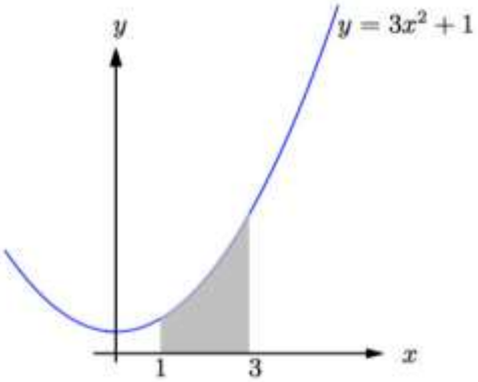
Situação- problema:

Calcular a área sob o gráfico de uma função contínua utilizando somente as ferramentas já aprendidas no curso de Cálculo. Não é permitido empregar nenhum conceito novo,tal como limite de somas.

Abordaremos a questão através de um caso particular, observando que a técnica usada se generaliza facilmente a qualquer função continua, limitada sobre um interval limitado :

Enunciado: Considere a função $f(x) = 3x^2 + 1$, restrita ao intervalo $[0, +\infty)$. Calcular a área abaixo do gráfico de f, limitada pelas retas $x = 1, x = 3 \; e \; y = 0$.

Calcular a área sob o gráfico da função representada na figura abaixo.



Na solução deste problema utilizaremos resultados estudado no Ensino Básico bem como generalizaremos o cálculo de áreas de figuras estudado no Ensino Médio. A primeira parte da solução do problema será desenvolvidada em conjunto com os participantes. A segunda parte ficará a cargo dos participantes exclusivamente. Inicialmente introduziremos uma função $\boldsymbol{A(x)}$, no interval $[\mathbf{0}, \infty)$, cujo valor em cada ponto $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ é igual à área da região ``varrida'' por um segmento vertical (de comprimento variável) com extremidades apoiadas no eixo das abcissas no gráfico de $\boldsymbol{f(x) = 3x^2} +$, quando este se move desde a origem até o ponto de abscissa $\boldsymbol{x}$.

Introduzimos a função área $\boldsymbol{A}$, definida em $[\mathbf{0}, +\infty)$ por $\boldsymbol{A(x)}$=área do conjunto

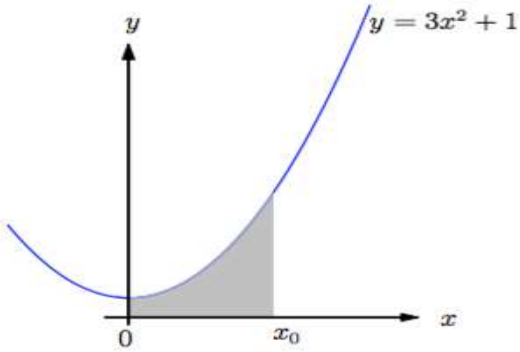
$$\{(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}) \mid \mathbf{0} \leq \boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{x}, \ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{f(t)}\}.$$

O nome técnico deste tipo de conjunto é *conjunto ordinal*, determinado pela função A *sobre o intervalo* $[a, x]$.

OBS: A exigência de a função ser não negativa, não é essencial. Ela foi introduzida somente para simplificação dos racioínios, e de estarmos considerando áreas; em casos mais gerais, usa-se a noção de area com sinal, e a exigência feita pode ser deixada de lado. Não vamos nos aprofundar nesses detalhes no minicurso.

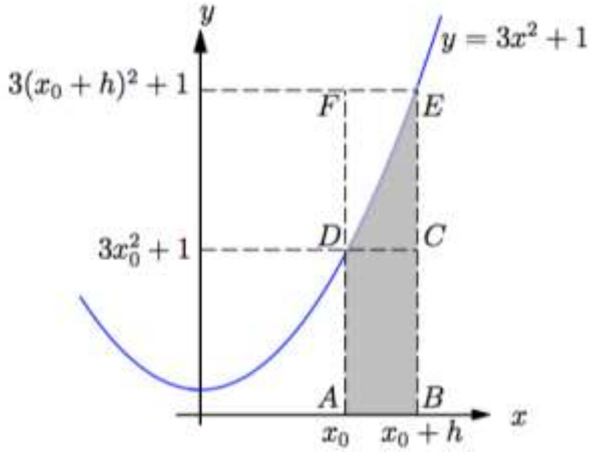
Retornemos ao problema em questão:

Figura 1 :A função área associada a $f(x) = 3\,x^2 + 1$



A área que queremos calcular é dada pelo número $A(3) - A(1)$. Infelizmente não conhecemos a expressão de $A(x)$. Mas podemos calcular a sua taxa de variação. De fato, seja $x_0 \in (0\,,+\infty)$ um número real arbitrário, porém fixado, e consideremos um número $h > 0,$ também arbitrário

Figura 2: Estimativas para o valor da função-área



Acompanhando pela figura 2, observando que h é o comprimento das bases dos retângulos $ABCD$ e $ABEF$, vemos que as respectivas áreas R_1:($ABCD$) e R_2: $(ABEF)$ satisfazem

$$R_1 \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq R_2,$$

isto é:

$$(3{x_0}^2 + 1).\,h \;\leq A(x_0 + h) - A\,(x_0) \;\leq\; [3(x_0 + h)^2 + 1].\,h\;;$$

e então, dividindo por $h > 0$:

$$(3{x_0}^2 + 1) \leq [A(x_0 + h) - A\,(x_0)]/h \;\leq\; [3(x_0 + h)^2 + 1].$$

Tomando os limites laterais pela direita, quando $h \to 0$, e levando em conta a continuidade da função $f(x) = 3x^2 + 1$ no ponto x_0, podemos garantir que

$$\lim_{h \to o^+} 3(x_0 + h)^2 + 1 = \lim_{h \to o^+} 3(x_0)^2 + 1 = 3{x_0}^2 + 1.$$

De acordo com o teorema da compressão,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = 3{x_0}^2 + 1.$$

Este ultimo limite nos ``conta'' que a derivada lateral à direita de $A(x)$, no ponto x_0, é igual ao valor da função f no ponto x_0. Para garantir que a derivada existe, precisamos garantir que a derivada lateral à esquerda de A em x_0 existe e tem o mesmo valor.

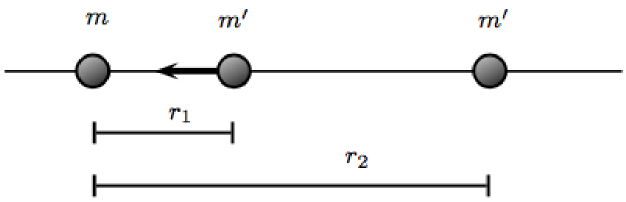
Esta é a nossa primeira tarefa no minicurso.
Vamos à ela!

(Resolvemos aqui, coletivamente, a primeira tarefa)

3. Proposição, aos participantes, de outra *situação- problema*

(de natureza distinta da situação anterior, mas também levando aos conceitos de Primitiva e Integral de Newton).

Calcular o trabalho *contra a força de atração gravitacional*, para deslocar uma massa m' inicialmente a uma distância r_1 de uma outra massa $m \gg m_1$, até uma posição $r_2 > r_1$ na mesma "linha de ação da força de atração" entre m e m_1, a ser resolvida somente com conhecimentos do Ensino Básico e do Cálculo Diferencial, já estudados no curso.



Esta tarefa também será resolvida no ``quadro-negro'' com a participação de todos.

4. Leitura, em pequenos grupos, de dois textos. O primeiro é um resumo do que é a *Integral de Newton*, inclindo a solução de uma outra *situação-problema* relativa ao cálculo de áreas sob gráficos de curvas fechadas parametrizadas. O outro, intitulado *Uma breve história das séries de Fourier* , ilustra o papel essencial da integração no processo de construir funções não triviais.

5.Debate geral ,com elaboração de relatório, sobre o texto abaixo:

Carta aos PROFESSORES DE MATEMÁTICA: “Olá, eu gostaria de questionar um assunto que imagino que já deve ter passado pela cabeça de alguns universitários e futuros professores de Matemática como eu, assim peço a opinião de vocês. Bem... Passamos no vestibular, realizamos o sonho de cursar Licenciatura Plena em Matemática. Se o objetivo do curso é nos formar para sermos PROFESSORES, ensinar nossos futuros alunos, então por que aprendemos Limites, Derivadas, Integrais, Equações Diferenciais, Análise Real e outros conteúdos que nunca vamos passar para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio? (. . .)”

No debate, serão apresentadas, dentre outras, as questões: O grupo concorda integralmente com teor do texto? Discorda em parte? Por que? Agora, falando de Matemática: Onde foi parar o Teorema Fundamental do Cálculo? A integral de Newton é tão eficaz quanto a de Riemann? Quais são as vantagens e desvantagens de uma com relação à outra? Defendemos que a Integral de Newton é tão eficiente quanto a de Riemann, num primeiro estudo de integrais. Posteriormente, novos problemas vão requerer teorias de integrais mais elaboradas.

Após esta etapa, abordaremos a seguinte discussão: “O conceito de função está no cerne das transições epistemológicas (mudanças revolucionárias de paradigmas) do Ensino Fundamental para o Ensino Médio; e deste para o Ensino Superior, o processo de construir funções é nuclear no ensino de matemática em qualquer nível”? Por que?

Considerações Finais

Acreditamos que a abordagem proposta facilita a compreensão do Cálculo Integral em sua função principal, qual seja, vamos repetir, como ferramenta para inventar funções. Os alunos das graduações quando indagados “*para que serve estudar integrais*?”, logo as associam ao cálculo de áreas, volumes, centros de gravidade, e outras questões ``arquimedianas’’ de natureza geométrica por “excelência”. Não é uma resposta incorreta, mas talvez incompleta. Assim como as primitivas e seu uso no cálculo de áreas foram fundamentais para as construções dos coeficientes das funções definidas por séries de Fourier, elas são igualmente imprescindíveis para a obtenção de funções que “surgem” nas soluções de diversas situações-problema bem mais complexas, apresentadas pelas Ciências Físicas e pela Tecnologia. Concluindo, convém acentuar a necessidade de uma articulação suave entre os conteúdos trabalhados no Ensino Médio e os do Ensino Superior. O primeiro curso de Cálculo, com destaque para a apresentação das primitivas e integrais é "pedra angular" no processo.

Materiais:

- projetor
- quadro branco e marcadores azul e vermelho
- 10 folhas A4 para cada participante

Público Alvo: Professores de Cálculo I e alunos de graduação em cuja grade curricular figura Cálculo I

Vagas: 20.

Referências

KITCHEN,J. W. *Calculus of One Variable.* Reading Massachussts California – London – Ontario.Addison-Wesley Publishing Company, 1968.

MOREIRA,M. A;MASINI,E. F. S. *Aprendizagem significativa* : a teoria de *David Ausubel.* São Paulo:Morais, 1982.

STEWART,J. *Cálculo, volume 1*, 7. ed. São Paulo:Cengage Learning, 2016.

VERGNAUD, G. "A teoria dos campos conceituais". In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget, 1996. VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade.* Curitiba: UFPR, 2009.

LIMA,E.L. *Áreas e Volumes* Coleção Fundamentos da Matemática Elementar - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro RJ, 1985.

BARTLE,R.G. ; TULCEA,C.I. *Honors Calculus* Scott, Foresman, 1970.