



AS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E SUAS INFLUÊNCIAS NO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Gerson Scherdien Altenburg¹

Cristina Franz Strelow²

André Luis Andrejew Ferreira³

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: Neste trabalho é apresentada observações de investigações sobre o ensino do Teorema de Pitágoras, que pode-se considerar uma importante descoberta para a Matemática. Ao se trabalhar o Teorema, na forma de investigação, faz-se necessário valorizar as conjecturas de um raciocínio indutivo dos alunos, mas que estas sejam verificadas em testes. Do professor a exigência parte do controle e preparação frente a novas situações de incertezas, no qual apenas pode direcionar a uma solução, não apresentando-a. Como atividade de investigação, o trabalho aqui apresenta-se em uma turma de nono ano do Ensino Fundamental de uma Escola que trabalha na forma Ambientes de Aprendizagens, com a ressignificação do teorema de Pitágoras, frente a uma metodologia investigativa, cujo resultado deste trabalho é abordada como satisfatório pois as conjecturas acerca da fórmula do Teorema foram elaboradas, testadas e verificadas, chegando a igualdade pitagórica.

Palavras-chave: Conjecturas. Pitágoras, Ambientes.

Introdução

O trabalho intitulado como *As Investigações Matemáticas e suas Influências no Ensino do Teorema de Pitágoras*, tem como forma objetiva a investigação acerca da dedução da fórmula do Teorema de Pitágoras. A partir da referência dos teóricos João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira, de uma análise do livro:

¹ Graduado em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPel), Especialista em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG), Especialista em Mídias na Educação pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e Mestrando no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (Mestrado Profissional) da Faculdade de Educação (FAE) da Universidade Federal de Pelotas (UFPEL). Atua na rede Municipal e Estadual do ensino regular (Ensino Fundamental e Médio, no Município de São Lourenço do Sul). gersonsaltenburg@gmail.com

² Graduada em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPel), Especialista em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG) e Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (Mestrado Profissional) da Faculdade de Educação (FAE) da Universidade Federal de Pelotas (UFPEL). Atua na rede Municipal do ensino regular (Ensino Fundamental no Município de São Lourenço do Sul). cristreLOW@gmail.com

³ Graduado em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Mestre em Ciência da Computação pelo PPGC/UFRGS e Doutor em Informática na Educação pelo PPGIE/UFRGS. Atualmente está lotado no Departamento de Educação Matemática da Universidade Federal de Pelotas (UFPEL), atua também na área de Ensino da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Professor dos Programas de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (Mestrado Profissional) da Faculdade de Educação/UFPEL, exercendo o cargo de coordenador e no Programa de Pós-Graduação de Educação Matemática (Mestrado Acadêmico) do Instituto de Física e Matemática/UFPEL. andrejew.ferreira@gmail.com

Investigações Matemáticas na Sala de Aula, que proporciona uma reflexão epistemológica da construção de conhecimentos de forma investigativa, tanto na forma de realizar as atividades bem como avaliá-las, em torno de estudos feitos no Brasil e em Portugal. Os teóricos discutem a investigação não sendo a solução para o ensino da matemática e consideram que há outros fenômenos e situações que favoreçam a aprendizagem, como as tecnologias informáticas.

O trabalho desenvolvido acerca-se, de um modo investigativo, as relações do teorema de Pitágoras e seu ensino. Através de conceitos, procedimentos e representações com os alunos de uma turma de Nono (9º) ano do Ensino Fundamental.

Assim no caso do Teorema de Pitágoras, a forma tradicional pode tornar o seu conhecimento um tanto quanto sem sentido, pois em certas ocasiões demonstra-se a fórmula e fazem-se os exercícios, sem aplicação cotidiana, acarretando um processo mecânico, no qual o aluno tem apenas um papel passivo diante de sua aprendizagem. O que leva o aluno a ter dificuldades de entendimento. Segundo Tenório, Carvalho e Tenório (2016, p. 4) “No modelo tradicional, as atividades ocorrem em sala e englobaram aulas expositivas e resolução de questões, sem o estímulo a participação ativa e a colaboração”.

A escola onde foi desenvolvida a investigação de ensino, conta com Ambientes de Aprendizagem para uma melhor excelência na educação. No total são seis Ambientes que atendem turmas de 5º ao 9º Ano do Ensino Fundamental, são eles: Eco Vida (Ciências), Atelier de Artes (Artes e Línguas Estrangeiras), Terra à Vista (História, Geografia e Filosofia), Corpo e Movimento (Educação Física), Mundo Letrado (Português e Ensino Religioso) e Lógica dos Números (Matemática).

A proposta é inovadora e pioneira no município e está em adaptação. Proporciona mais tempo de dedicação dos alunos em sala de aula, além de proporcionar um ambiente mais propício para cada disciplina e com horários diferenciados.

Este relato aborda uma breve história de Pitágoras de Samos bem como as aproximações do contexto escolar na visão dos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). A contribuição teórica, além dos teóricos já mencionados, conta com Altenburg (2016) que fala do professor mediador e Santos (2013) como contribuição dos conteúdos potencialmente significativos e a disposição do aluno em querer aprender.

Como metodologia, as investigações contemplam o trabalho desenvolvido para o ensino e dedução da igualdade pitagórica. Algumas conclusões são abordadas ao final do trabalho.

Concepções Históricas

Ao falar do Teorema de Pitágoras, inicialmente, é imprescindível conhecer um pouco da história de seu descobridor Pitágoras de Samos. Segundo Eves (2011), filósofo e matemático, conhecido assim por ter nascido na cidade grega chamada Samos, uma ilha do mar Egeu, por volta de 572 antes de Cristo,

Para Souza e Pataro (2012) Pitágoras viajou por muito lugares, dentre os quais Pérsia e Egito. É possível que tenha sido discípulo de Tales de Mileto. Fundou a escola Pitagórica, um centro de estudos voltado para a área da Matemática, Ciências Naturais, Filosofia, etc, em Crotona, que atualmente é Itália.

O nome de Pitágoras é dado a um teorema por ter sido o primeiro a demonstrá-lo, apesar de os babilônicos e os egípcios já o utilizarem em construções e em medições de terras. Esse teorema estabelece uma relação entre os catetos e a hipotenusa do triângulo retângulo. (SOUZA, PATARO, 2012, p. 56)

A relação do teorema que se utiliza até hoje, é tida como: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Ao transpor esse conhecimento para o ambiente escolar, depara-se com inúmeras situações. Assim, neste trabalho, a pesquisa versa sobre o ensino do Teorema de Pitágoras e adversidades encontradas em sala de aula ao expor, para 20 estudantes (14 e 15 anos) do 9º ano do Ensino Fundamental/2016 da rede pública de ensino do município de São Lourenço do Sul, estado do Rio Grande do Sul.

Contextualização

A investigação matemática oportuniza o aluno chegar ao conhecimento através de conjecturas, seja ela através de uma construção coletiva ou individual. Ao aluno cria-se a hipótese de se tornar autor da construção do próprio conhecimento. Neste processo, ao professor cabe o apoio nas atividades.

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2015), os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1998 valorizam a realização de atividades de investigação e pesquisa no ensino,

destacando a importância de processos heurísticos da criatividade do conhecimento matemático. Indica que as conjecturas são formuladas a partir da observação.

Em conformidade com os (PCNs) para os anos finais do Ensino Fundamental que evidencia:

[...] Em Matemática existem recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade. Um exemplo bastante conhecido é a representação do Teorema de Pitágoras mediante figuras que permitem “ver” a relação entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos. (BRASIL, 1998, p. 45).

Creditou-se ao formular os pilares do plano de aula desse conteúdo a necessidade de construir as formas geométricas para uma melhor visualização do conceito do teorema. Assim, cria-se uma coerência entre os objetivos a serem almejados pelo coletivo. Objetivos esses que os alunos consigam identificar, compreender e estabelecer relações entre as formas geométricas presentes em seu dia a dia, chegando de forma coletiva a esse resultado.

A investigação matemática pode ser uma inspiração nas aulas para a construção do conhecimento. Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2015, p.9) “Importa saber se está ao alcance dos alunos investigar questões matemáticas e de que forma isso pode contribuir para a sua aprendizagem. Importa saber de que competências necessitam e as condições necessárias.” A investigação não é apenas atentar para problemas difíceis ou muito sofisticados. De modo oposto, é trabalhar com problemas que inicialmente parecem confusos e tentar organizar as informações ao passo de formular conjecturas-testes-demonstração.

Ainda de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2015), a investigação Matemática é a busca pelo conhecer o que não se sabe. É descobrir relações entre objetos matemáticos, identificar o problema a se resolver. Uma generalização através da observação, usando a indução de situações cotidianas. O processo de investigar na Matemática se faz verdadeiramente para aprender Matemática e não apenas compreender o que já foi ou está resolvido.

Podemos dizer que a realização de uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e a avaliação do trabalho realizado. (PONTE, BROCADO, OLIVEIRA, 2015, p.20).

Na investigação a questão não está bem definida, cabe ao investigador criar uma definição, mas para isso o aluno precisa ter uma participação ativa, para que use seus recursos cognitivos, um experimento. Assim é convidado a agir como um matemático, para discutir e argumentar as conjecturas com o coletivo.

Com esta abordagem a matemática deixa de ser uma disciplina com conhecimentos prontos, onde o professor apenas transmite ao aluno, e passa a ser algo construtivo, em que o aluno é parte integrante na construção de conceitos matemáticos. (ALTENBURG, 2016, p. 11).

O acompanhamento do processo do conhecimento, ou seja, do ensino, está amparado na aprendizagem contextualizada.

Para que esta ocorra, é preciso entender um processo de modificação do conhecimento e reconhecer a importância que os processos mentais têm nesse desenvolvimento, sendo que primeiro o aluno precisa estar disposto a aprender e segundo, o conteúdo escolar precisa ser potencialmente significativo. (SANTOS, 2013, p.53).

De que forma os alunos absorvem o que lhes é dito? Seria fazer com que o aluno tome gosto pela Matemática, de maneira diferente, com ajuda deles na construção de conceitos, onde assim eles podem questionar e participar do processo de aprender. Aprender, que segundo Santos (2013, p.11), “é o principal instrumento de sobrevivência. Quando paramos de aprender, morremos”.

Ambientes de Aprendizagens

Dentro do contexto escolar, as salas de aulas estão organizadas em Ambientes de Aprendizagem, sendo o público alvo, os alunos de 5º ao 9º ano (séries finais) do Ensino Fundamental da Escola Municipal Francisco Frömming (Figura 1). O ambiente em que está situada a área da Matemática recebeu a intitulação “Lógica dos Números” (Figura 2), dispendo de muitos materiais pedagógicos, tais como sistemas de medidas e tabuada (Figura 3), armário com jogos e geoplanos (Figura 4), sólidos geométricos (Figura 5), régua e esquadros (Figura 6). Favoráveis para apoio na construção do conhecimento.

Figura 1 – Escola Municipal de Ensino Fundamental Francisco Frömming



Fonte: Autor.

Figura 2 - Ambiente de Aprendizagem “Lógica dos Números”.



Fonte: Autor

Os alunos permanecem por 115 minutos neste ambiente, passando para outro ambiente após o intervalo. O professor fica responsável pela organização do ambiente, para receber e trabalhar com uma nova turma. Essa organização pode ser de acordo com os objetivos da aula, para isso o mesmo tem autonomia para agrupar as classes, trabalhar em grupos ou individualmente.

Figura 3 – Sistema de medidas/tabuada.



Fonte: Autor.

Figura 4 – Armário com jogos e geoplanos.



Fonte: Autor.

Figura 5 – Sólidos geométricos.



Fonte: Autor.

Figura 6 – Réguas e esquadros



Fonte: Autor.

O objetivo da disposição em ambientes é organizar as salas de aulas por área do conhecimento, com materiais didáticos, pedagógicos específicos e necessários para cada ambiente, buscando assim a excelência na educação.

Como objetivos específicos dos ambientes, proporcionar aos educadores e educandos do 5º ao 9º Ano do Ensino Fundamental, um ambiente equipado e

prazeroso de se estar, alavancando o processo de ensino e de aprendizagem; Subsidiar a prática cotidiana do educador, buscando diminuir a reprovação e evasão escolar.

A proposta de implantação dos ambientes de aprendizagem na escola Francisco Frömming é pioneira e em período de adaptação no município de São Lourenço do Sul, pois foi implantado no ano de 2016, gerando um tema: “Ambientes de Aprendizagem: Uma Nova Perspectiva Para a Excelência na Educação” que está voltado para uma aprendizagem real e significativa, com uma metodologia que contribua para o desenvolvimento do aluno, levando-o a ser protagonista da sua aprendizagem.

Por experiência, pode-se dizer quanto o contexto escolar é complexo e por vezes persistente as mudanças, pois ainda há professores que utilizam em sua prática a educação tradicional, não que seja errado, mas talvez por comodidade ou insegurança ao novo. A formação profissional se faz necessária tendo em vista a velocidade das transformações do mundo contemporâneo. Uma prática tradicional, muitas vezes acaba por assustar o aluno do ambiente escolar, tornando-se este um espaço desinteressante de se permanecer.

O ambiente escolar é um espaço que deve ser propício ao conhecimento e a aprendizagem como foco, sem deixar de ser um espaço acolhedor, onde professores e alunos sintam-se bem.

Faz-se necessário, proporcionar o aluno a ser pesquisador, protagonista e investigador na construção do seu próprio conhecimento e para tanto, é primordial que o professor seja o mediador dessa metodologia. Portanto, é indispensável que este se comprometa a estar atualizado, sendo capaz promover situações que favoreçam o aprendizado do aluno.

Ainda de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2015, p.10), “investigações matemáticas envolvem naturalmente, conceitos, procedimentos e representações (...) não encaramos as investigações matemáticas como a chave que por si só resolva todos os problemas do ensino da matemática”. A construção do conhecimento pode ser efetivada mediante uma boa investigação de conceitos.

Metodologia

A investigação de conceitos matemáticos como forma de ensino, mais precisamente sobre o Teorema de Pitágoras foi desenvolvido com uma turma de Nono (9º) ano do Ensino Fundamental com 20 alunos (9 meninos e 11 meninas). Todos oriundos da zona rural do município de São Lourenço do Sul, residentes da localidade Harmonia (onde se situa a escola) e localidades vizinhas, em dois encontros de duas aulas e meia (115 minutos), totalizando 3 horas e 50 minutos. Proporcionando uma reflexão da Educação Matemática.

O conceito de investigação matemática, [...] ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína[...] O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE, BROCADO, OLIVEIRA, 2015, p. 23).

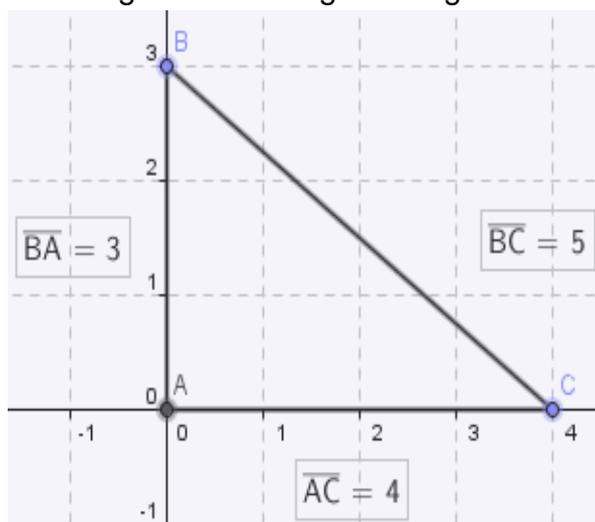
Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2015), uma investigação matemática decorre em três fases: (I) o professor realiza a introdução da tarefa, por escrito ou oralmente; (II) realização das investigações, de diversas formas, em duplas, individualmente ou em grupos por parte dos alunos, com base na situação que lhes foi apresentada; (III) exposição das conjecturas adotadas e dos resultados encontrados.

A proposta de investigação sobre o teorema de Pitágoras foi abordada diferentemente das demais atividades habituais de sala de aula. Foi apresentado aos alunos o Triângulo Pitagórico (3, 4, 5) e outro de mesmo modelo, porém de tamanho diferente (6, 8, x). Para isso foi distribuído régua e esquadros, como objetivo de precisão das medidas.

A primeira pergunta dos alunos foi: “o que somos pra fazer?” Como forma de induzi-los a usar o raciocínio, a orientação foi de observar semelhanças, manipular, explorar, ver diferenças, usar o raciocínio.

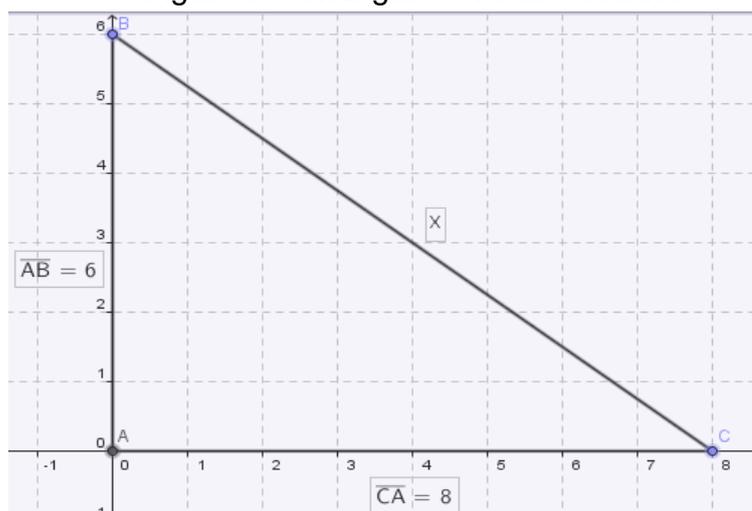
Na atividade inicial (figura 7), os alunos facilmente observaram, que no primeiro triângulo, são números consecutivos e no segundo triângulo, o triângulo com uma variável (Figura 8) são números pares e diferem sempre em duas unidades e em ambos existe um ângulo de 90º graus (ângulo reto).

Figura 7 – Triângulo Pitagórico



Fonte: Autor.

Figura 8 – Triângulo com uma variável

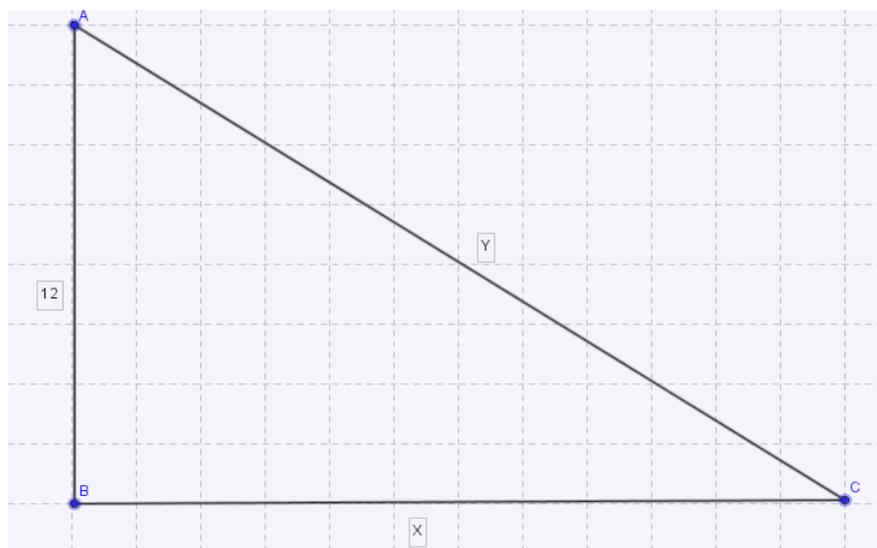


Fonte: Autor.

Tão logo o valor desconhecido será dez. Estabeleceram suas conjecturas de forma autônoma.

Como forma de criar uma nova investigação, para uma exploração mais detalhada e com devido tempo necessário, a proposta foi de um novo triângulo com duas variáveis (Figura 9), porém com apenas um número nele inscrito, (12, x , y).

Figura 9 – Triângulo com duas variáveis



Fonte: Autor.

Depois de algum tempo discutindo em grupo, surgiram com a comparação entre os dois triângulos anteriores (Figuras 7 e 8) e chegaram à conclusão de que a medida horizontal seria 16 e a parte maior seria 20. Sendo que a aluna “A” respondeu: “chegamos a essa conclusão, pois vimos que os números dobram a cada novo triângulo”. Por sua vez conjecturaram e mediante testes conseguiram chegar à conclusão.

Como forma de investigar mais detalhadamente de que maneira isso poderia acontecer? O professor por aguçar este pensamento da aluna “A”, instigou-os da seguinte maneira: Se “dobra” os valores absolutos a cada novo triângulo (3, 4, 5); (6, 8, 10); (12, 16, 20), porque não pensar em um triângulo que, seja sempre na mesma proporção do triângulo inicial (3, 4, 5); (6, 8, 10); (x, y, z)?

Reuniram-se, discutiram e chegaram à conclusão que deveria ser um triângulo com as medidas (9, 12, 15), assim como mostra a figura 10.

Figura 10 – Triângulo resposta de (x, y, z).



Fonte: Autor.

O professor, por sua vez até o momento atuando mais na retaguarda e apoiando sempre que necessário, lança uma nova investigação, quanto à medida dos segmentos de retas que juntos formam o triângulo: o que mais se pode observar na regularidade dos quatro até o momento analisados?

Novamente em grupo, com um pouco mais de dificuldade, analisaram, discutiram e concluíram que o segmento de reta vertical e horizontal sempre é menor que o da diagonal.

Na tentativa de investigar, o motivo de tal acontecimento em todos os triângulos, foi proposto a eles encontrar um método que pudesse verificar esse acontecimento. Sendo que neste momento não estavam mais no primeiro encontro, e sim no segundo. Essa tarefa foi a mais complicada de acharem a solução, pois diante dos acontecimentos, estavam por descobrir (testar) uma dedução que verificasse para todos os já estudados.

Várias hipóteses surgiram, porém, antes de socializar, chegavam à conclusão de que não se verificava para todos os triângulos.

A aluna “B” que não estava presente no primeiro encontro, surgiu com a ideia do seu grupo de que, cada número que correspondia ao lado do triângulo poderia ser a resposta da raiz quadrada de outro número. Por exemplo: $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$ e $\sqrt{25} = 5$. Para não perder essa dedução da aluna, foi perguntado a ela e aos

demais, o que poderia ser feito com os números cuja resposta seriam os lados do triângulo?

Novamente os grupos reuniram-se e debateram sobre o que realmente o professor estava tentando fazer com aqueles números. O aluno “C” surgiu com a seguinte hipótese.

$$\sqrt{25} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

Porém ele mesmo, de acordo com o conhecimento de radicais que já tivera, percebeu que não poderia somar radical que não fossem semelhantes. Após alguns minutos, o professor de modo a incentivar o caminho no qual estavam seguindo, optou em intervir “pensem em como chegaram aos números que estão dentro do radical?”

O aluno “D” respondeu, isso é fácil, basta elevar os números do primeiro triângulo apresentado ao quadrado.

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$$25 = 25$$

Isso é válido para os demais triângulos apresentados? Vamos testar?

$$10^2 = 6^2 + 8^2$$

$$15^2 = 12^2 + 9^2$$

$$100 = 36 + 64$$

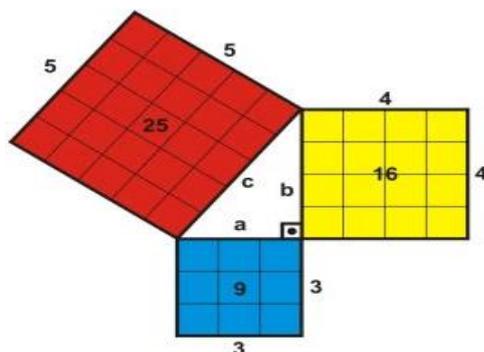
$$225 = 144 + 81$$

$$100 = 100$$

$$225 = 225$$

“Sim professor” foi à resposta da aluna “B”. O professor por sua vez perguntou: “O que podemos concluir”? A resposta foi unanime, “o lado maior elevado ao quadrado é igual à soma dos outros dois lados menores também elevados ao quadrado”. Eis que surge o exemplo do professor, como mostra a figura 11 detalhadamente.

Figura 11 – Demonstração do teorema através da dedução dos alunos.

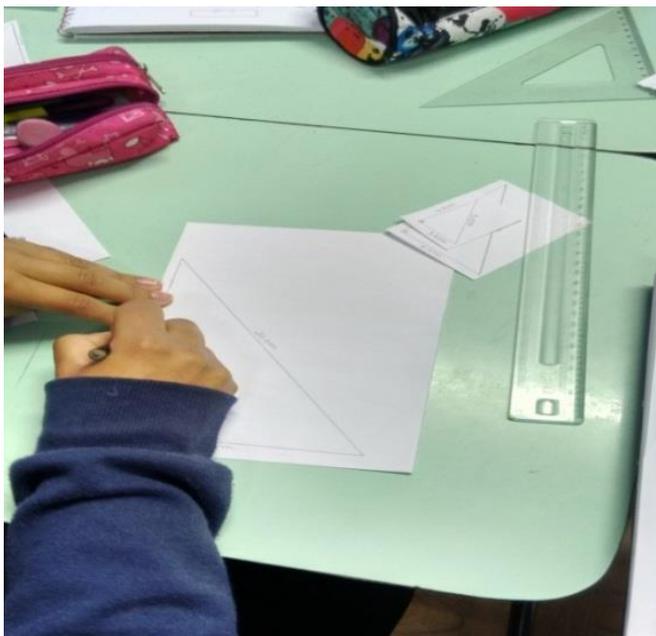


Fonte: <https://fisicaempratica.wordpress.com/category/matematica/>

Como forma de padronizar o nome dos segmentos de retas que compunham o triângulo, os menores lados chamam-se Catetos e a maior medida que se localiza no lado oposto ao ângulo reto, chama-se de Hipotenusa. As figuras 12 e 13 mostram os trabalhos sendo realizados pelos alunos.

$$H^2 = C^2 + C^2$$

Figura 12 – Construção dos triângulos.



Fonte: Autor.

Figura 13 – Demonstração do teorema



Fonte: Autor.

Conclusão

No início da atividade de investigação, aos alunos é importante assegurar a motivação na tarefa a ser desenvolvida, sendo de potencial significado para construir conceitos matemáticos, mesmo que as questões sejam abertas. Dessa forma estarão mais propícios a fazer conjecturas.

Ao fazerem as conjecturas, os alunos explicitam uma linguagem não verbal, uma vez que diz respeito aos seus próprios pensamentos. O professor necessita estar atento as formulações e testes destas conjecturas, garantindo que as investigações aconteçam de forma evolutiva, para isso precisa raciocinar matematicamente para dar subsídio ao aluno.

A interferência do professor, no momento em que estavam no impasse de somar radicais diferentes, foi positiva, pois acelerou a conjectura sem dizer se estava correta ou errada.

Os resultados foram todos socializados e discutidos, sendo feitas reflexões do poder de argumentação dos alunos. Para isto foi reservado cerca de 30 minutos do segundo encontro.

A concentração dos alunos na atividade de investigação foi intensa, onde anotavam as conjecturas dos colegas para assim chegar a conclusões.

O professor nas aulas de investigação assume uma posição diferente das habituais aulas, tende a ficar mais na retaguarda, um desafio para ele, mas é determinante para o êxito das atividades. Por dar autonomia aos alunos serem autores de sua investigação e por garantir o significado da Matemática.

O ensino desenvolveu-se de forma investigativa, onde a cada nova situação, os alunos elaboravam conjecturas, faziam os testes e por fim demonstravam a solução de cada triângulo retângulo. Por fim, chegaram à conclusão do teorema de Pitágoras através da investigação, onde primeiro se demonstra o teorema para posterior realização de listas de exercícios.

O ensino quando proposto como forma de investigação, valoriza as conjecturas dos alunos. Neste processo, o professor ajuda o aluno na compreensão de investigação e de como fazer, sendo peça fundamental na mediação, valorizando o ensino de forma diferenciada.

Referências

ALTENBURG, G.S. **Cultura, Tecnologia e Matemática: Um estudo Etnomatemático para o ensino de Geometria.** 2016. 12f. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd16_gerson_altenburg.pdf. Acesso em 02 Mar. 2017.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica do ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.** Brasília: SEMT/MEC.1998.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

<https://fisicaempratica.wordpress.com/category/matematica/>. Acesso em 28 Out. 2016.

PONTE, J. P. *et al.* **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3ª ed. ver. Ampl.; 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

SANTOS, J. C. F, **Aprendizagem significativa:** modalidades de aprendizagem e o papel do professor. Porto Alegre: Mediação, 2013. 93p - 5ª ed.

Souza, J.R.; Pataro, P.R.M. **Vontade de Saber Matemática.** 2ed. São Paulo: FTD, 2012.

TENÓRIO, A. *et al.* **Ensino de Triângulos com o Software Geogebra.** Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 7. n. 1, p. 1-18, 2016. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodo>