RESOLUÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DO PRIMEIRO GRAU: A EXPERIÊNCIA DE ENSINAR UM ALUNO CEGO

Elen Graciele Martins[1]

Barbara Lutaif Bianchini[2]

Educação Matemática e Inclusão

Resumo: Este trabalho, de cunho qualitativo, tem por objetivo apresentar parte de uma tese de doutorado em Educação Matemática, da primeira autora e orientada pela segunda, que trata sobre Matemática e a pessoa cega. Apresentamos as estratégias da primeira pesquisadora utilizadas para ensinar um aluno cego a resolver graficamente Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Nosso estudo levou em consideração as ideias teóricas propostas por Ferri sobre estilos de pensamento matemático, que, segundo ela, podem ser classificados como visual, analítico e integrado. A demanda de ensinar esse aluno ocorreu após a aplicação de uma atividade de sondagem contendo um exercício que explorava a representação gráfica do conteúdo em questão, sendo observado que nosso sujeito nunca havia tido contato com essa forma de apresentação, o que pode ter favorecido a não utilização, por ele, dos estilos de pensamento visual e integrado. Durante a explicação do conteúdo, nosso sujeito evidenciou facilidade ao lidar com a representação gráfica de sistemas lineares, o que nos pareceu confirmar a importância de que os temas sejam apresentados de forma adequada, com materiais e linguagem adaptados à condição de aprendizagem de nossos sujeitos. A experiência vivenciada ao ensiná-lo, nos mostrou que é possível explorar todos os meios de aprendizagem desses sujeitos e que a condição de cegueira não é um fator determinante que os impeçam de aprender, desde que sejam ofertados meios de acesso aos conteúdos.

Palavras Chaves: Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Aluno cego. Estilos de pensamento matemático.

Introdução

Desde meados da década de 1990, a legislação educacional brasileira prevê a matrícula de alunos com necessidades especiais na rede regular de ensino. Porém, os avanços na legislação ocorridos desde então ainda não culminaram no atendimento qualitativo desses sujeitos. Faz parte da realidade de muitas escolas brasileiras a presença de alunos deficientes matriculados e frequentadores de salas de aulas regulares, mas que não possuem acesso a todos os conteúdos desenvolvidos com os alunos que não possuem nenhuma deficiência.

Martins (2010) e Manrique (2015) destacam que além de materiais adequados

[1] Mestre em Educação Matemática. Prefeitura Municipal de Guarulhos. elengraciele@globomail.com

[2] Doutora em Psicologia da Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. barbaralb@gmail.com

às condições dos alunos e da adequação ou reorganização dos espaços físicos das escolas, também há a necessidade de professores com formação adequada para lidarem com as demandas da inclusão. As autoras concordam que a divulgação de resultados de pesquisas pode contribuir com a formação de professores, pois, a falta de informação sobre o tema teve destaque no trabalho realizado por Manrique e Moreira (2014) envolvendo as percepções de professores acerca da inclusão de alunos com necessidades especiais nas aulas de Matemática. Os autores citados também identificaram a escassez de pesquisas que envolvem o ensino de Matemática para alunos com deficiência, assim, neste artigo, descrevemos as estratégias utilizadas para ensinar um aluno cego a resolver sistemas de equações lineares de primeiro grau graficamente. Nosso relato pode ser uma contribuição a outros professores de Matemática que receberão alunos cegos em suas classes, pois oferecem indícios de como desenvolver esse conteúdo com alunos que tenham a mesma condição física de nosso sujeito.

Os estilos de pensamento matemático

Neste artigo nosso objetivo não é o de discutir todas as questões da Atividade de Sondagem (Figura 1), faz-se necessário apresentá-la na íntegra, bem como as definições de Ferri (2012) acerca dos estilos de pensamento matemático, pois esse é um dos focos de estudo da primeira autora deste artigo em sua tese de doutorado e, foi por meio da Atividade de Sondagem que percebemos que nosso sujeito não conhecia a resolução por gráfico de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau.

Ferri (2012) descreve os estilos de pensamento matemático como preferências do sujeito em utilizar suas habilidades matemáticas. A autora destaca quatro características dos estilos de pensamento matemático: 1) não podem ser considerados como habilidades matemáticas do indivíduo, mas suas preferências em como utilizá-las em cada contexto apresentado; 2) estão relacionados à personalidade de cada indivíduo e geralmente estão ligados às experiências positivas por ele vivenciadas; 3) não podem ser considerados como estratégias de resolução de problemas matemáticos; 4) podem ser influenciados socialmente.

Os estilos de pensamento matemático são classificados por Ferri (2012) como visual, analítico e integrado. Sendo que o estilo visual é caracterizado pela utilização de representações de imagens como desenhos, esboços, gráficos etc., para resolver situações matemáticas; o estilo analítico é caracterizado pela utilização de algoritmos formais e a resolução dos exercícios segue uma sequência lógica, ou seja, são resolvidos passo a passo; o estilo integrado é a combinação dos estilos visual e analítico.

Diante do exposto, realizamos um estudo sobre os estilos de pensamento matemático utilizados por um aluno cego ao resolver exercícios de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro grau. A Atividade de Sondagem foi o primeiro passo desse estudo e a partir dela, observamos a necessidade de explorarmos as formas de apresentação do conteúdo em questão, a fim de possibilitar ao nosso sujeito o contato com os estilos de pensamento visual e integrado.

Nosso sujeito de pesquisa

É um adolescente cego de 14 anos que cursa o 9º ano do ensino fundamental II num colégio de pequeno porte, da rede particular de ensino da grande São Paulo, Brasil. Ele e sua irmã gêmea nasceram prematuros, com 25 semanas de gestação. Diferente de sua irmã, ele apresentou vários problemas de saúde que o fizeram ficar internado por cerca de quatro meses. A perda da visão só foi percebida por seus familiares quando ele já estava em casa.

As etapas desenvolvidas

Os dados apresentados a seguir constituem uma parte de uma tese de doutorado em Educação Matemática que investiga a aprendizagem de Matemática por sujeitos cegos. A Atividade de Sondagem (Figura 1), proposta ao nosso sujeito, continha quatro exercícios e foi desenvolvida num encontro de 60 minutos de duração, fora do ambiente escolar. Tínhamos a informação, dada pela mãe de nosso sujeito, que o conteúdo já havia sido desenvolvido na sala de aula com o professor de Matemática.

O objetivo da Atividade de Sondagem era identificar quais estilos de pensamento matemático nosso sujeito utilizaria para resolver cada questão.

A atividade foi impressa à tinta e os gráficos foram representados numa malha quadriculada (em relevo) que faz parte do *kit* do aluno fornecido pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC aos deficientes visuais. Foi ofertada ao aluno a possibilidade de utilizar o *kit* em todas as questões, caso ele decidisse resolvê-las utilizando a representação gráfica (Figura 2). À pesquisadora coube a função de ler, as questões, pois as mesmas não estavam em Braille, em seguida, a primeira autora anotava as respostas dadas, além de registrar observações pertinentes ao estudo realizado em sua tese de doutorado. O encontro foi gravado em áudio, sendo transcrito após a realização da atividade.

Nosso sujeito resolveu os três primeiros exercícios utilizando o estilo de pensamento matemático analítico e não conseguiu fazer o exercício 4, por não conhecer a representação gráfica do conteúdo em questão. Apesar do foco de nosso estudo não ser ensinar conteúdos matemáticos, percebemos em nosso sujeito certa frustração por não conseguir resolver o item 4 da Atividade de Sondagem, o que nos fez tomar a decisão de ensiná-lo como fazer. Para tal, marcamos dois encontros, fora do ambiente escolar. Um de aproximadamente 1h30min de duração, que foi destinado à explicação do conteúdo e o outro de 1h de duração para a reaplicação da questão 4 da Atividade de Sondagem. Os encontros foram gravados em áudio e transcritos.

Figura 1: Atividade 1 – Sondagem

Atividade 1 - Sondagem

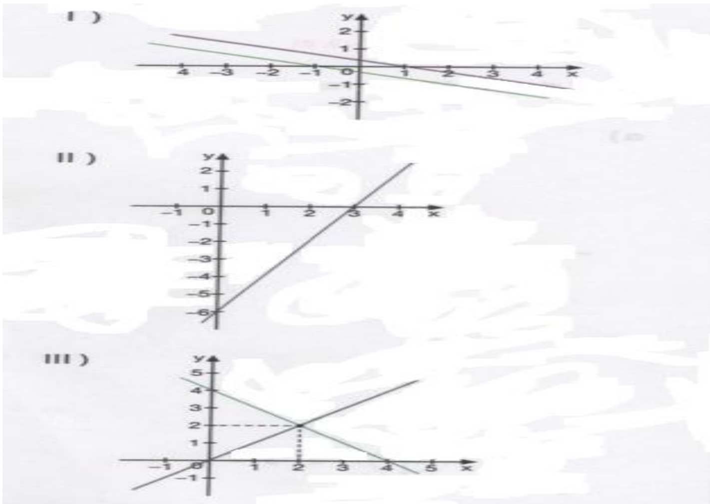
1. A soma entre a idade de Carlos e o dobro da idade de Lúcia é 125 anos. Qual é a idade de Lúcia, sabendo que ela tem o dobro da idade de Carlos?

2. Um certo veículo utilitário custa R$ 15.000,00 a mais que o modelo *hatch* da mesma marca. Se os dois juntos custam R$ 69.000,00, quanto custa o modelo utilitário?

3. Em uma caixa, o número de bolas vermelhas é o triplo do número de bolas pretas. Se tirarmos 2 bolas pretas e 26 vermelhas, o número de bolas de cada cor ficará igual. Quantas bolas vermelhas há na caixa?

4. Associe cada sistema de equações à sua representação gráfica.

a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -4x + 2y = -12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = -2 \end{cases}$



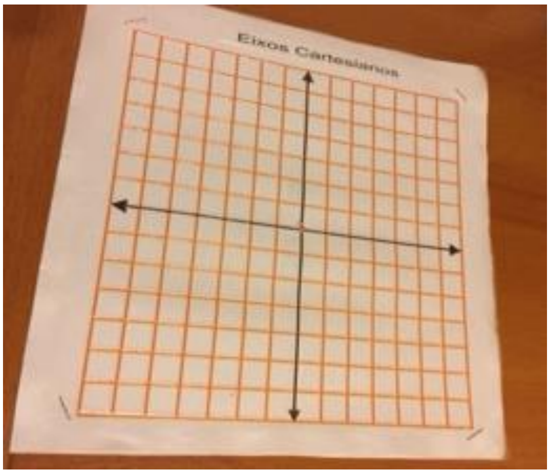
Fonte: Dados da pesquisa

Não discutiremos aqui as resoluções das questões 1, 2 e 3, porque nosso sujeito não apresentou dificuldade para resolvê-las. Cabe a nós ressaltar que ele utilizou, nas três questões, o estilo de pensamento matemático analítico. Nosso objetivo é apresentar as estratégias utilizadas pela primeira autora para ensinar ao sujeito de nosso estudo como resolver Sistemas Equações Lineares de Primeiro Grau utilizando a representação gráfica, ou seja, dando subsídios para a resolução da questão 4 da Atividade de Sondagem.

Nosso primeiro passo foi apresentar a malha quadriculada[3] ao nosso sujeito. Explicamos como se dá a representação de pontos no plano Cartesiano (Figura 2).

[3] Esse material pertencia o aluno e ficou disponível para ser utilizado pelo professor de Matemática de sua escola desde o 6º ano do ensino fundamental.

Figura 2: Malha quadriculada em relevo



Fonte: *Kit* do aluno enviado pelo MEC[4]

Após percebermos que ele já conseguia identificar os eixos *x* e *y,* apresentamos os materiais que foram utilizados na representação dos pontos (massinha de modelar) e das retas (macarrão do tipo espaguete). Iniciamos assim o trabalho de identificação dos seguintes pontos no plano cartesiano: (1, 3); (-2, 6); (0, -6); (3, 0); (4, 2) (Figura 3). Não observamos dificuldades em nosso sujeito para marcar ou identificar pontos no plano cartesiano, ele conseguiu se guiar pelo tato para identificar onde cada ponto deveria ser representado. No momento em que ele encontrava onde marcar o ponto, solicitava à pesquisadora que lhe desse uma bolinha (usamos massinha de modelar para representar os pontos) e ele mesmo a colocava onde achava correto. Percebemos que ele usava, algumas vezes, um ponto já marcado como parâmetro para determinar outro. Por exemplo: para marcar o (2, 6) ele usou como parâmetro o ponto (1, 3), iniciando a contagem a partir dele e não do ponto (0, 0).

[4] Cabe a observação que o sistema cartesiano plano não contém as setas à esquerda de zero no eixo *x* e abaixo de zero no eixo *y*.

Figura 3: Marcando pontos na malha quadriculada

Fonte: Dados da pesquisa

A segunda parte de nossa atividade envolveu determinar retas no plano cartesiano usando pontos dos exemplos dados anteriormente: (1, 3); (-2, 6) e (0, -6); (3, 0) (Figura 4). Não observamos dificuldades em nosso sujeito para determinar as retas. Ele já havia marcado os pontos com as bolinhas de massinha de modelar e no momento de colocar o espaguete para representar as retas, solicitava ajuda da pesquisadora para posicioná-lo no plano cartesiano. Não houve interferência da pesquisadora nas escolhas do sujeito, ela apenas posicionava o espaguete nos pontos indicados por ele.

Figura 4: Determinado retas na malha quadriculada

Fonte: Dados da pesquisa

Após percebermos que ele já conseguia identificar e marcar pontos e determinar retas, iniciamos a explicação de como é possível resolver Sistemas de Equações Lineares do Primeiro Grau utilizando representação gráfica.

Iniciamos a explicação, oralmente, indicando quais são as possibilidades de representação do sistema no plano cartesiano:

- Quando as retas são concorrentes, o sistema tem uma única solução e esta corresponde às coordenadas do ponto em que as retas se cruzam;
- Quando as retas são paralelas e distintas, o sistema não tem solução;
- Quando as retas são coincidentes, o sistema tem infinitas soluções que correspondem às coordenadas de cada ponto dessas retas.

Também explicamos como realizar a análise dos coeficientes e dos termos independentes das equações a partir dos exemplos dados a seguir:

Sendo $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'x = c' \end{cases}$

Comparando as razões obtidas: $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}$, com *a', b' e c'* ≠ 0 temos:

1) se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, o sistema é possível indeterminado (SPI) e as retas que o representam serão coincidentes.

Exemplo: $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, a razão é $\frac{1}{2}$, logo o sistema é SPI.

2) se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, com *a', b' e c'* ≠ 0, o sistema é possível determinado (SPD) e as retas que o representam são concorrentes.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{12}{3}$, logo o sistema é SPD.

3) se $\frac{a}{a\prime} = \frac{b}{b\prime} \neq \frac{c}{c\prime}$, com *a', b' e c'* ≠ 0, o sistema é impossível (SI) e as retas que o representam serão paralelas.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{3}{2}$, logo o sistema é SI.

4) se $\frac{a}{a\prime} \neq \frac{b}{b'} = \frac{c}{c\prime}$, com *a', b' e c'* ≠ 0, logo o sistema é possível determinado (SPD) e as retas que o representam serão concorrentes.

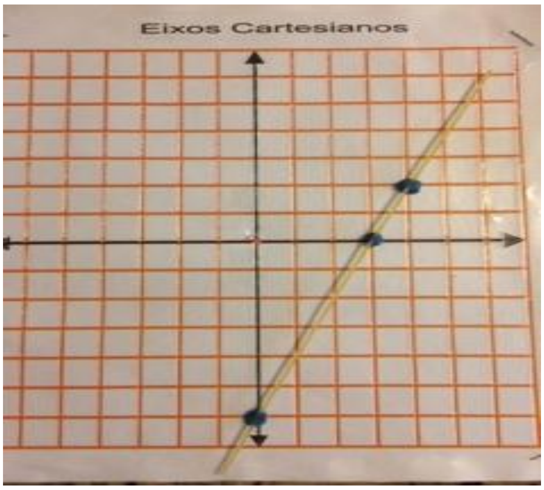
Exemplo: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Temos: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$, logo o sistema é SPD. Explicamos ao nosso sujeito que esse exemplo é similar ao exemplo 2.

Explicamos ao nosso sujeito as condições para que o sistema seja considerado SPI, SPD e SI e como utilizar as razões entre os coeficientes das equações para resolvê-lo.

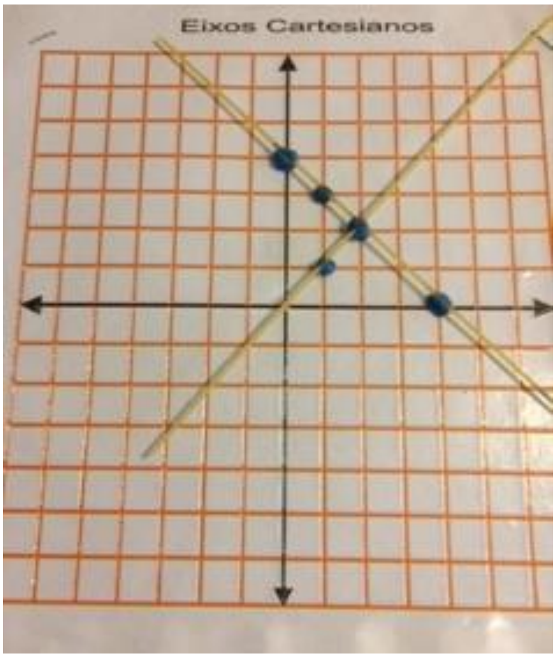
No segundo encontro solicitamos ao nosso sujeito que resolvesse a questão 4 da Atividade de Sondagem. Os gráficos foram apresentados na malha quadriculada (Figuras 5, 6 e 7) e coube à pesquisadora ler a questão e anotar as etapas de resolução construídas por nosso sujeito.

Figura 5 – Item II da Questão 4 representado em relevo.



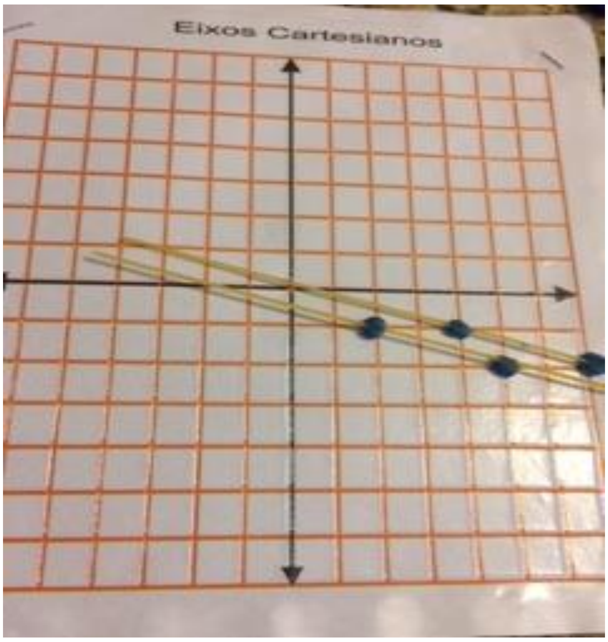
Fonte: Elaborado pela primeira autora.

Figura 6: Item III da Questão 4 representado em relevo.



Fonte: Elaborado pela primeira autora.

Figura 7: Item I da Questão 4 representado em relevo



Fonte: Elaborado pela primeira autora.

Iniciamos o trabalho lendo o enunciado da questão algumas vezes e pedindo ao sujeito que sentisse, tocando com as mãos, como eram os gráficos que representavam os sistemas de equações lineares. Imediatamente, após sentir os gráficos, ele disse que sabia que o gráfico que continha duas retas paralelas representava um sistema impossível. Nosso sujeito lembrou que havíamos explicado, no encontro anterior, como determinar, pelo gráfico, se os sistemas eram SPI, SPD e SI. Perguntamos qual, dos três sistemas lineares representados nos itens *a*, *b* e *c* da questão 4 estava associado ao gráfico apresentado. Ele pediu para lermos algumas vezes as equações que formavam os sistemas lineares e, após "memorizar" cada sistema, disse que já conseguia associar os sistemas às representações gráficas. Perguntamos como ele pensou para chegar à resposta (anotamos o passo a passo descrito por ele).

> 1) *Depois que eu "vi" (sentiu) os gráficos, eu já sei qual é impossível, qual é possível determinado e qual é possível indeterminado.*

Pedimos, então, para que ele dissesse qual gráfico correspondia a cada sistema.

> *O impossível tem duas retas que não se encontram.... Essa foi fácil! Eu fiquei com isso na mente* (risadas)*; o que cruza* (retas concorrentes) *é determinado e sobrou o indeterminado para o que tem um macarrão só... que você* (pesquisadora) *tinha falado que era para imaginar que tinha dois* (retas coincidentes)*.*

Pedimos a ele para associar o gráfico à representação algébrica do sistema. Ele nos disse que lembrava que tinha que "montar" frações (razões entre os coeficientes), mas que estava com dúvida no sinal. Perguntamos de qual sinal ele se referia. Ele explicou que era o sinal de igual e de diferente. A dúvida era como utilizá-los para encontrar a resposta. Retomamos com ele os exemplos dados no encontro anterior e após reexplicarmos como analisar os coeficientes, ele conseguiu expressar como as razões deveriam ser escritas e associar corretamente os gráficos aos sistemas de equações lineares.

Considerações

Neste artigo apresentamos as etapas desenvolvidas pela primeira autora para ensinar um aluno cego a resolver graficamente Sistemas de Equações Lineares de Primeiro Grau. Esse estudo emergiu de uma Atividade de Sondagem, realizada por um aluno cego, na qual havia a necessidade de reconhecer a representação gráfica desse conteúdo, sendo então identificado que ele não conhecia essa forma de resolução.

Foi possível explorar a representação gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro grau com nosso sujeito. Houve a necessidade de ofertar a ele condições de acesso aos conteúdos explorados, o que, neste caso, foi a utilização de materiais concretos (malha quadriculada em relevo, massinha de modelar e macarrão espaguete) e adequação à linguagem utilizada para explicar o conteúdo. Assim, ao retornar à resolução da questão 4 da Atividade de Sondagem, nosso sujeito conseguiu resolvê-la, porém, houve a necessidade de retomarmos a explicação de como trabalhar com as razões dos coeficientes das equações do sistema linear. Assim, refletimos que talvez fossem necessários mais encontros para que nosso sujeito tivesse mais autonomia para resolver a questão 4 da Atividade de Sondagem. O trabalho que realizamos possibilitou ao nosso sujeito ter acesso à resolução gráfica de Sistemas de Equações Lineares de Primeiro grau, e foi possível observar, na resolução da questão 4 a utilização do estilo de pensamento integrado pois, além de recorrer ao gráfico de cada item, nosso sujeito também utilizou a resolução algébrica para determinar as razões dos coeficientes das equações.

Assim, foi evidenciado que, ao apresentarmos o conteúdo matemático a este aluno cego de forma acessível, utilizando materiais e linguagem adequados à sua condição, não houve barreiras para entender e resolver a questão 4 da Atividade de Sondagem apresentada neste artigo.

Referências bibliográficas

MANRIQUE, A. L. (2015). Educação Matemática Inclusiva: Reflexões sobre resultados de pesquisas desenvolvidas em um projeto do OBEDUC/ 2010. *Anais do I SIPRAEM*. Santo André.

MANRIQUE, A. L e MOREIRA, G. E. (2014). Educação Inclusiva: Representações sociais de professores que ensinam Matemática. *Poíesis Pedagógica*, Catalão - GO, v.12, n.1, p. 127-149, jan./jun.

MARTINS, E. G. (2010) *O papel da percepção sonora na atribuição de significados matemáticos a Números Racionais por pessoas cegas e pessoas com baixa visão.* (Dissertação de mestrado). Universidade Bandeirante de São Paulo UNIBAN, São Paulo, SP, Brasil.

SOUZA, J. R. e PATARO, P. M. (2012) *Vontade de saber matemática*. 8º ano. São Paulo: FTD.