O USO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS PARA AUXILIAR A COMPREENSÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

Francisca Brum Tolio[1]

Eleni Bisognin[2]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Neste trabalho investigou-se as contribuições da metodologia da Resolução de Problemas juntamente com a utilização de Materiais Manipuláveis na compreensão dos conceitos dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. Nesse trabalho são relatados resultados parciais dessa pesquisa, de cunho qualitativo, realizada com 27 alunos da 3ª série do Ensino Médio Técnico em Agropecuária do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia. Foi aplicada uma sequência Didática composta de cinco atividades envolvendo os conceitos de Princípio Aditivo e Princípio Multiplicativo. Neste artigo foi feito um recorte em que é apresentada e analisada uma das atividades referentes a construção de senhas e utilizando-se materiais manipuláveis. Os dados da pesquisa foram obtidos por meio de gravações e dos registros das atividades dos alunos. Pode-se inferir, dos resultados obtidos, que a utilização dos materiais manipuláveis e seguindo os passos da metodologia de Resolução de Problemas, que ocorreu uma maior interação entre os alunos na sala de aula, despertou o interesse e a participação nas atividades e uma maior compreensão dos conceitos, facilitada pela utilização dos materiais manipuláveis.

Palavras Chaves: Resolução de Problemas. Princípio Multiplicativo. Materiais Manipuláveis.

INTRODUÇÃO

A Matemática é vista pelos alunos, na maioria das vezes, como uma disciplina difícil e sem aplicação, e isso propicia para nós professores um desafio, no sentido de que precisamos planejar aulas interessantes, motivadoras e mostrar a utilidade dos conteúdos matemáticos no dia a dia dos alunos.

Muitas vezes, no Ensino Médio, é comum observarmos um ensino meramente técnico, estanque, sem interação com a realidade do aluno, ou ainda, sem a interação com as demais disciplinas. Esse modo de ensinar torna as aulas desagradáveis, pois os discentes não veem a empregabilidade dos conceitos matemáticos, apreendendo somente fórmulas e processos mecânicos de resolução de exercícios, dificultando a interpretação e a interação.

A Análise Combinatória é um conteúdo presente em nosso cotidiano, pois a cada escolha que devemos realizar, empregamos o princípio aditivo ou o princípio multiplicativo. Esse conteúdo tem sido ministrado, muitas vezes, somente com base

---

[1] Mestre. Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – *Campus* Alegrete. francisca.tolio@iffarroupilha.edu.br

[2] Doutora. Centro Universitário Franciscano. Eleni@unifra.br

no livro didático, como material de apoio, ou seja, na maioria das vezes, os professores acabam utilizando somente esse recurso didático, o que não desperta o interesse do aluno. Outros recursos podem servir de motivação como por exemplo, materiais manipuláveis e jogos de raciocínio lógico. Essas estratégias podem tornar o conteúdo mais compreensível e agradável aos olhos dos estudantes.

Neste trabalho abordaremos os Princípios Aditivo e Multiplicativo, utilizando materiais manipuláveis juntamente com a metodologia de Resolução de Problemas. Será descrita a aplicação de uma atividade, referente a construção de obter a senha de um cadeado, tendo como objetivo a compreensão do conceito de Princípio Multiplicativo.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os primeiros estudos que referenciaram a Análise Combinatória foram encontrados nos livros de História da Matemática e observou-se que, ao longo da história, a Análise Combinatória se estruturou através do estudo das probabilidades.

Na Educação Básica, os problemas de contagem são apresentados como Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações. Neste trabalho, utilizamos o Princípio Fundamental da Contagem ou também denominado Princípio Multiplicativo.

Os materiais que utilizamos como aliados à metodologia de ensino, foram os Materiais Concretos, que no ensino de matemática, são conhecidos desde o século XIX, porém não eram muito utilizados como auxiliares para a aprendizagem, pois as aulas, nessa época, eram totalmente tecnicistas. No Brasil, a defesa da utilização desses materiais, no ensino da Matemática, surgiu em meados de 1920.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi utilizada a metodologia de "Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas" de acordo com os passos descritos em (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009). Segundo as autoras essa metodologia é um meio de ensinar Matemática por intermédio da Resolução de Problemas e não apenas para ensinar a resolver problemas

A resolução de problemas como metodologia de ensino surgiu a partir das ideias do matemático George Polya, que durante sua vida gerou uma longa lista de resultados matemáticos e, também, trabalhos dedicados a ensinar Matemática, sobretudo por meio da Resolução de Problemas (ALFARO, 2006). Considerando o ponto de vista de Polya, a parte mais importante da formação matemática, refere-se à maneira como se interpreta os problemas.

De acordo com Polya (2006), a ideia de resolução de problemas, consiste em: *"... em encontrar um caminho previamente não conhecido, encontrar uma saída para uma situação difícil, para vencer um obstáculo, para alcançar um objetivo desejado que não pode ser imediatamente alcançado por meios adequados"* (POLYA 2006 p.5).

De modo a auxiliar o professor que deseja desenvolver a metodologia de Resolução de Problemas para ensinar Matemática, Polya sugere quatro etapas a serem desenvolvidas: compreender o problema; estabelecer um plano para a resolução do problema; executar o plano e o retrospecto para examinar a solução encontrada.

Já as autoras Allevato e Onuchic (2009) destacam que ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas não é um trabalho fácil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia, considerando o nível de compreensão dos alunos e as necessidades do currículo, mas mesmo assim, há razões para utilizar essa metodologia de ensino-aprendizagem considerando-se sua eficácia.

Allevato e Onuchic (2009) apresentam nove etapas para organizar as atividades da metodologia de Resolução de Problemas: Preparação do problema; Leitura individual; Leitura em conjunto; Resolução do problema; Observação e incentivo; Registro das resoluções na lousa; Plenária; Busca do consenso; Formalização do conteúdo. (ALLEVATO, ONUCHIC, 2009 p.7-8)

A opção pelo uso dessa metodologia nos desafia como professor, nos transformando em mediadores do conhecimento e ao utilizarmos a postura de professor mediador não mais somos somente o transmissor dele, mas sim o mediador para a sua construção.

METODOLOGIA

A pesquisa realizada foi de cunho qualitativo. De acordo com D'Ambrósio (2004), a pesquisa qualitativa é um caminho para fugir do método de quantificar o aluno, uma vez que essa se preocupa com o contexto envolvido, com as pessoas e ideias, trazendo à tona falas e narrativas que antes permaneciam silenciosas.

Acreditamos que, ao empregar esse tipo de pesquisa, estaremos transformando o papel do professor e o papel do aluno.

Da mesma forma, Bicudo (2004) afirma: *“O qualitativo engloba a ideia do sujeito, possível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências.” (p. 104).*

Na realização desse trabalho utilizamos os seguintes instrumentos de coleta de dados: diário de campo da professora, registro das atividades dos alunos e a observação participante.

A utilização do diário de campo, como instrumento de anotações, muito nos auxiliou durante a pesquisa, uma vez que nele foram feitas todas as anotações necessárias antes, durante e depois das atividades. Antes, no sentido de anotar as atividades previstas para a aula e os objetivos a serem alcançados. Durante a realização das atividades, como um caderno de anotações, ou seja, um instrumento para se registrar todas as observações feitas nos grupos durante o período da resolução da atividade, procurando estabelecer conexões com o objetivo proposto. Após a realização da atividade, no Diário de Campo, foi registrada a conclusão de todas as impressões sobre a aula e a atividade realizada.

Os registros da atividade feita pelos alunos serviram como principal diagnóstico da pesquisa, porque neles constaram as estratégias construídas pelos próprios estudantes, para a resolução dos problemas. Nesses registros, estavam as dúvidas e certezas dos alunos durante a resolução, suas estratégias, seus erros e seus acertos.

Outro instrumento utilizado nessa pesquisa, foi a observação de todas as ações desenvolvidas em sala de aula e do comportamento dos alunos na busca de estratégias para a resolução dos problemas.

A sequência de ensino foi aplicada numa turma de 27 alunos do 3º ano do Ensino Médio Técnico em Agropecuária de um Instituto Federal de Educação, devidamente matriculados na instituição de ensino.

Durante a realização do trabalho em sala de aula, foram seguidas as etapas da Metodologia de Resolução de Problemas sugeridas por Allevato e Onuchic (2009). A investigação ocorreu na sala de aula em que a professora era a titular da turma, durante 2º semestre de 2015. A atividade que desenvolvemos envolveram os conceitos de Princípio Aditivo e de Princípio Multiplicativo.

Inicialmente, os alunos formaram trios, sendo que a escolha desses trios foi realizada por afinidade entre os estudantes. Para resolução da atividade foi entregue o material manipulável a cada trio (um triângulo, um quadrado e um círculo) e, após a resolução, foram recolhidos os registros dos alunos os quais foram analisados e serviram para verificar a compreensão dos alunos a respeito do conteúdo abordado.

A metodologia de Resolução de Problemas que utilizamos, para o desenvolvimento da pesquisa, foi adaptada de Allevato e Onuchic (2012) e de Polya (2006).

Durante a realização da pesquisa seguimos as seguintes etapas:

• Leitura Individual e em conjunto: nessa etapa os alunos, já em seus trios, receberam uma folha com a atividade prevista, bem como o material manipulável solicitado pela atividade. Inicialmente, cada trio realizou sua leitura e, posteriormente, foi realizada a leitura em conjunto.

• Resolução do Problema: os alunos, em seus trios, realizaram um trabalho cooperativo e colaborativo, tentando resolver os problemas, que foram discutidos entre seus pares e a professora, indagando as possibilidades de construção utilizando os materiais manipuláveis;

• Estratégias de resolução: perante o problema, os alunos construíram estratégias de resolução, anotando todas as possíveis informações já adquiridas durante as leituras e no decorrer da resolução da atividade, utilizando o material manipulável para responder as questões.

• Observação e Incentivo: durante essa etapa, a professora não teve mais o papel de transmissora do conhecimento, já que foram os alunos os próprios agentes do conhecimento. Nessa etapa, foram feitas as anotações no Diário de Campo, observando a maneira como os alunos tentam resolver os problemas, suas dúvidas e suas certezas. A professora os ajudou, incentivando-os a resolverem as situações-problema, desafiando-os quanto às suas capacidades intelectuais.

• Registro das atividades no quadro: nessa etapa, os alunos foram convidados a registrar, no quadro, suas resoluções, independentemente de estarem certas ou erradas. A ideia foi de que os diferentes processos de resolução fossem apresentados para que todos os alunos os analisassem e discutissem com o intuito de chegar a um consenso.

• Plenária: com as resoluções no quadro, abrimos uma plenária, ou seja, uma discussão sobre os métodos de resolução feitos pelos colegas, sanando dúvidas que ficaram durante o processo de resolução. A professora, nessa etapa, se comportou como mediadora das discussões, em alguns momentos realizando perguntas que levassem os alunos a chegar na resolução correta.

• Busca do consenso: após sanar as dúvidas e analisar as resoluções e soluções obtidas para a atividade, nós (professora e estudantes), chegamos a um consenso sobre o resultado correto e mais adequado para a situação-problema em questão.

• Formalização do conteúdo: nessa etapa, a professora formalizou os conceitos de Princípio Aditivo e Multiplicativo, organizando a estrutura em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos na resolução dos problemas.

ANÁLISE E DISCUÇÃO DOS RESULTADOS

Para o desenvolvimento da atividade, os alunos puderam contar com o seguinte material: cinco unidades de cada figura geométrica (um triângulo, um quadrado e um círculo). Este material foi utilizado no intuito de ajudar a montar as possibilidades de respostas de acordo com os questionamentos da situação problema proposta.

O objetivo principal da atividade consistiu em explorar as possíveis combinações de três diferentes formas geométricas para a construção do conceito de Princípio Multiplicativo.

O problema proposto foi o seguinte: *Na compra de um cadeado, para bicicleta, a loja fornece um produto que disponibiliza uma combinação de cinco figuras geométricas como senha. No entanto, o cliente deve escolher a combinação de senha, utilizando as três figuras geométricas desenhadas no cadeado, da maneira que lhe for mais viável.*

Suponhamos que uma pessoa adquira esse modelo de cadeado e gostaria de testar algumas possibilidades de senha. Ao utilizar as figuras disponíveis no cadeado, responda às seguintes questões:

a) *Quantas são as possíveis combinações que você pode fazer?*

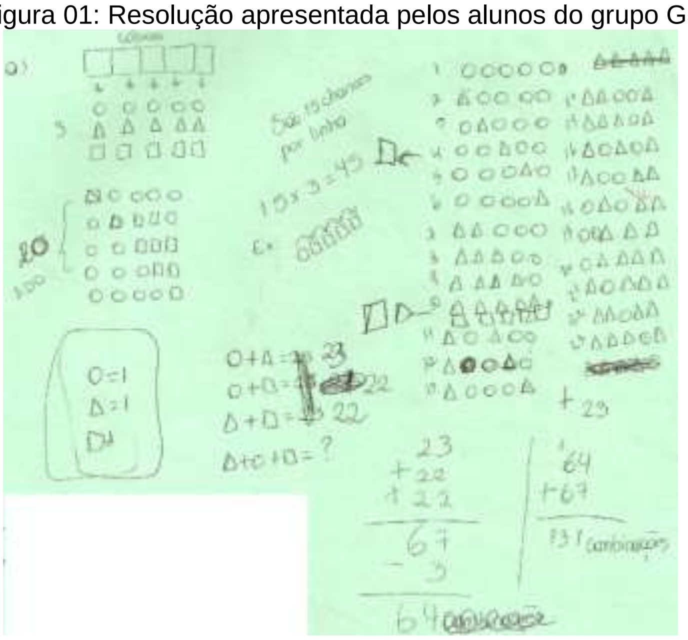
b) Caso o cliente queira utilizar, no máximo, um círculo, de quantas maneiras ele poderá realizar essa senha?

c) Se o cliente desejar utilizar dois triângulos, de quantas maneiras ele poderá escolher a senha?

Para a alternativa (a), esperava-se que os alunos verificassem que existem três possibilidades para cada posição, representadas pelas figuras geométricas compostas no cadeado. Logo, poderiam responder que, para a primeira opção, seriam 3 possibilidades; para a segunda posição, também seriam 3 possibilidades e dessa forma ocorreria até a quinta posição. Para chegar à resposta final, os alunos utilizariam o Princípio Multiplicativo: $\underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} \times \underline{3} = 3^5 = 243$ possibilidades de senhas para o cadeado.

Ao analisarmos as resoluções apresentadas pelos alunos, pudemos verificar que um dos grupos esquematizou várias possibilidades, porém os alunos não conseguiram encontrar a resposta correta, uma vez que utilizaram somente o Princípio Aditivo. Isso é demonstrado na figura 01:

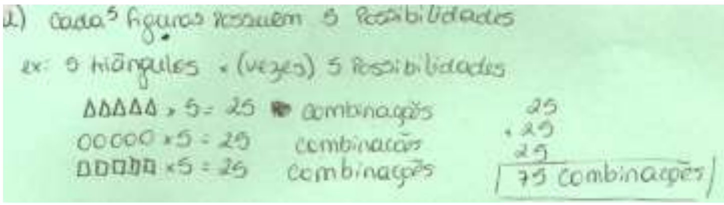
Figura 01: Resolução apresentada pelos alunos do grupo G3



Fonte: Dados extraídos da pesquisa

Outros grupos apresentaram somente cinco possibilidades para cada figura, não utilizando o Princípio Multiplicativo. Já que foram disponibilizadas somente três figuras geométricas, os grupos, por meio do Princípio Aditivo, somaram as possibilidades encontradas para cada figura. Podemos verificar este tipo de solução na figura 02 a seguir:

Figura 02: Resolução apresentada pelo grupo G4



Fonte: Dados extraídos da pesquisa

A primeira interpretação esperada para a alternativa (*b*) seria analisar como é possível utilizar no máximo um círculo se existe a possibilidade de não utilizar círculos em nenhuma das posições, ou seja, utilizando o mesmo princípio da alternativa (a), teríamos 2^5, em que o número dois representa as figuras triângulo e quadrado, e o número 5, a quantidade de posições expressas no cadeado.

Para a segunda interpretação, os alunos poderiam fixar a utilização de um único círculo, podendo trocar as outras quatro figuras restantes. Logo, encontrariam 2^4. No entanto, para essa possibilidade, o círculo poderia ser fixado em qualquer uma das cinco posições, o que resultaria em 5×2^4.

Utilizando uma representação esquematizada, teríamos o seguinte:

$\underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ } = 2^5$

$\underline{\ \bullet\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ } = 2^4$

$\underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ \bullet\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ } = 2^4$

$\underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ \bullet\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ } = 2^4$

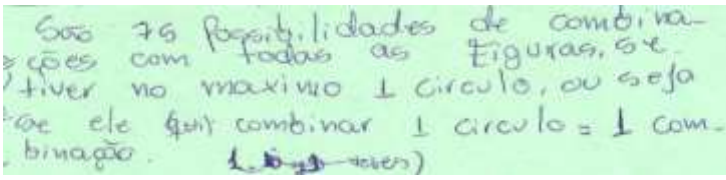
$\underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ \bullet\ }\ \ \underline{\ 2\ } = 2^4$

$\underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ \bullet\ } = 2^4$

Para cada uma das opções acima, os alunos poderiam empregar o Princípio Multiplicativo. Assim, para finalizar a quantidade de possibilidades de senhas possíveis, foi necessário somar as parcelas, ou seja, somar cada uma das possibilidades ilustradas, de modo a aplicar o Princípio Aditivo. Assim, seria possível se chegar à seguinte conclusão: $2^5 + (5 \times 2^4) = 112$ possibilidades de senhas.

Nas resoluções apresentadas pelos alunos, observou-se que dois grupos consideraram que só haveria uma única possibilidade de senha do cadeado, uma vez que interpretaram a questão equivocadamente, de modo que a única alternativa descrita pelos dois grupos foi a de que o cadeado só utilizaria círculos em todas as posições. Isso pode ser visualizado na figura 06:

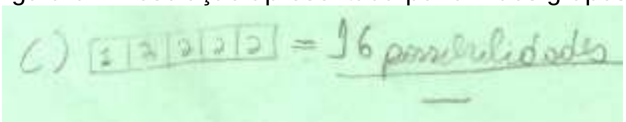
Figura 06: Resolução apresentada por um dos grupos.


São 75 possibilidades de combinações com todas as figuras, se tiver no máximo 1 círculo, ou seja se ele quer combinar 1 círculo = 1 combinação.

Fonte: Dados extraídos da pesquisa

Um dos grupos apresentou a resolução exposta na figura 07, empregando o Princípio Multiplicativo, porém consideraram uma única posição para o círculo e não levaram em consideração que a questão indicava no máximo, um círculo.

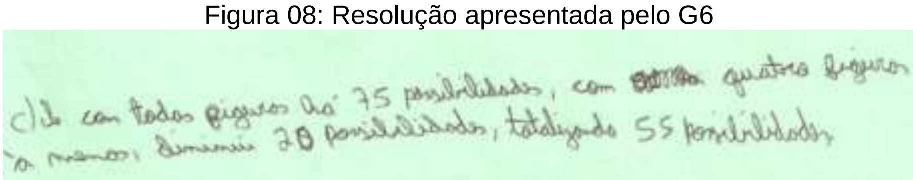
Figura 07: Resolução apresentada por um dos grupos.


c) 1 | 2 | 2 | 2 | 2 = 16 possibilidades

Fonte: Dados extraídos da pesquisa

Os outros grupos não conseguiram compreender o Princípio Multiplicativo. Desta forma apresentaram como resolução uma ideia inicial de 75 possibilidades. Eles diminuíram 20 possibilidades, as quais se referiam à utilização de mais de um círculo, deixando as outras cinco que se referiam a um único círculo para cada posição do cadeado. Analisamos que esses grupos conseguiram interpretar melhor a alternativa, contudo não se utilizaram do pensamento cominatório, como mostra a figura 08 na sequência:

Figura 08: Resolução apresentada pelo G6


c) com todas figuras há 75 possibilidades, com quatro figuras no mínimo, diminui 20 possibilidades, totalizando 55 possibilidades

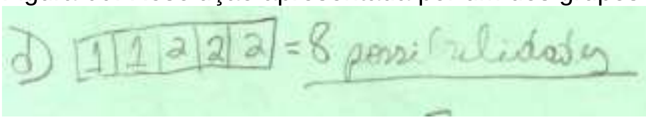
Fonte: Dados extraídos da pesquisa

Para a alternativa *(c)*, os alunos deveriam distribuir os triângulos nas posições oferecidas pelo cadeado e, nas posições restantes, as três disponíveis. Também deveriam usar duas possibilidades, que representam o círculo e o quadrado.

Bastaria, nesse caso, que fossem utilizadas todas as possíveis posições que os triângulos poderiam assumir, e a resposta resultaria em encontrar, para cada parcela 2^3, porém foram disponibilizadas 10 parcelas distintas, ou seja, 10 posições diferentes, que acolheriam os dois triângulos. Logo, o resultado seria, já utilizando do Princípio Aditivo, $2^3 + 2^3 + ... + 2^3 = 10 \times 2^3 = 80$ possibilidades.

Nessa alternativa, os grupos não conseguiram realizar a interpretação correta da questão, havendo diversas representações. É preciso salientar que somente um dos grupos utilizou o Princípio Multiplicativo. Por outro lado, não perceberam que haviam posições distintas para os triângulos, conforme a figura 09:

Figura 09: Resolução apresentada por um dos grupos.



Fonte: Dados extraídos da pesquisa

O único grupo que tentou realizar um esquema referente as posições, não conseguiu aplicar os princípios multiplicativo e aditivo. Isso pode ser visualizado na figura10 a seguir:

Figura 10: Resolução apresentada por um dos grupos.

Fonte: Dados extraídos da pesquisa

Os alunos consideraram que esta atividade havia sido muito difícil. Todavia, com a ajuda professora, durante a exposição das resoluções na lousa e durante a plenária, quando indagados pela professora-pesquisadora, sobre a interpretação correta das alternativas, perceberam que haviam se equivocado, em decorrência de não terem conseguido esquematizar a senha do cadeado.

Os alunos utilizaram somente o material manipulável fornecido, não construindo possibilidades diferentes. Muitas vezes, fixaram uma figura em um único lugar, sem perceber que as figuras poderiam trocar de posição.

Segundo relatado pelos próprios alunos, durante a formalização dos conceitos, essa atividade serviu para eles como um diagnóstico de como estavam realizando a interpretação. Mesmo sendo uma atividade simples, em alguns momentos, foi necessário que utilizassem seus conhecimentos interpretativos, o que não aconteceu.

No momento em que a professora estava finalizando a aula, foi feito o seguinte comentário: para resolver problemas, é necessário que se faça uma boa leitura, para melhor interpretá-los, mesmo que, para isso, seja necessário ler muitas vezes. Após esse comentário, ouviu-se a seguinte fala: *"agora a aula de matemática não é mais só fazer continhas, tem que saber português"*. Não foi possível identificar qual aluno teceu esse comentário, mas detectamos que eles perceberam a importância da matemática e como ela está presente no dia a dia das pessoas, além do valor de uma interpretação adequada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa optamos por utilizar a metodologia da Resolução de Problemas pois esta metodologia tem se apresentado eficaz no desenvolvimento do pensamento combinatório.

Para o desenvolvimento desta atividade selecionada para este trabalho, utilizamos três horas aulas, ministradas em um mesmo dia.

Optamos por utilizar os Materiais Manipuláveis como auxiliadores na construção de estratégias de resolução, o que facilitou a interpretação e a compreensão da questão trabalhada durante a atividade.

No decorrer da realização das atividades observamos que os alunos apresentaram algumas dificuldades em compreender a metodologia. No início das atividades, eles sentiram dificuldades, porém, quando conseguiram se adaptar desenvolveram habilidades e compreenderam a utilização do princípio estudado.

Onuchic enfatiza que:

> O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação e linguagem formal. O foco está na ação por parte do aluno. (ONUCHIC, 1999, p.207)

A metodologia de ensino utilizada neste trabalho contribuiu para transformar as aulas tornando-as mais interessantes, dinâmicas e significativas para os alunos, que puderam explorar e desenvolver um raciocínio combinatório.

A partir das declarações finais apresentadas pelos alunos concluímos que a metodologia de ensino foi de suma importância para a aprendizagem do conteúdo desenvolvido. Os alunos também destacaram a importância dos Materiais Manipuláveis como uma forma diferenciada de auxílio para resolver os problemas e auxiliou na compreensão e na visualização das estratégias de solução.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALFARO, Cristian. Las Ideas de Pólya en la Resolución de Problemas. **Cuadernos de Investigación y Formación Matemática**, Escuela de Matemática, Universidad Nacional José Romilio Loría. Costa Rica, 2006, año 1, nº1.

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Trabalhando volume de cilindros através da resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista** - RS, v.10, n.1, p. 95-103, 2009.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Loudes de La Rosa. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, B. C. de (org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Editora Cortez, 2012. p. 232 – 252.

BICUDO, M. A. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C; ARAÚJO, J. L. (Org). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica. 2004. P. 101-114.

D'AMBROSIO, U. Prefácio. In: **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência. 2006.