ÁREAS E PERÍMETROS DE RETÂNGULOS COMO RECURSO NO ENSINO DO CÁLCULO ALGÉBRICO

Tiago Vencato Martins[1]

Mauro Dinael Beilfuss Bartz[2]

RESUMO

Este artigo faz uma breve reflexão sobre alguns aspectos do ensino da álgebra, buscando bibliografias que fundamentem a associação entre álgebra e geometria como tentativa de significação do estudo do cálculo algébrico oitavo ano do ensino fundamental. Sugere uma modificação no ALGEPLAN, também a sugestão de atividades com a utilização deste material. Constitui-se igualmente de uma análise dos resultados da aplicação destas atividades em uma turma de sétima série (oitavo ano) apontando que a utilização deste tipo de material é válida desde que se apoie na busca de relações entre a atividade prática desenvolvida e a teoria estudada.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de álgebra. Significação da álgebra. Atividades com Algeplan**.**

INTRODUÇÃO

O estudo da álgebra e o desenvolvimento de um pensamento algébrico constituem-se, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), uma importante oportunidade para que o aluno desenvolva sua capacidade de abstração e generalização, além de desenvolver uma importante ferramenta para a resolução de problemas.

Este texto traz uma breve reflexão sobre questões ligadas ao ensino da álgebra seguindo a ideia de que a associação entre a geometria e a álgebra é uma das possíveis formas de dar significado ao ensino do cálculo algébrico no oitavo ano do ensino fundamental.

Sugerimos neste texto atividades que fazem associação ente áreas e perímetros de retângulos e quadrados com alguns dos conteúdos estudados no oitavo ano. Estas atividades foram aplicadas em uma turma de oitavo ano, segue neste texto também algumas considerações sobre material escrito produzido pelos alunos.

---

[1] Mestre em Ensino de Matemática - UFRGS. Instituto Federal Sul-rio-grandense. tiagomartins@ifsul.edu.br

[2] Mestre em Ensino de Matemática - FURG. Instituto Federal Sul-rio-grandense. maurobartz@ifsul.edu.br

QUAIS SÃO AS COISAS DA ÁLGEBRA?

De acordo com as ideias de Lins e Gimenes (1997) não existe um consenso do que realmente seja uma forma de pensar algebricamente. O que existe, na verdade, é uma ideia de que, por exemplo, equações, o cálculo algébrico e funções são algumas das "coisas da álgebra".

Destacam Lins e Gimenes (1997):

> "O problema de um conceito, com base em conteúdos é poder saber se isto ou aquilo "é" álgebra, e trabalhar estes conteúdos, mas não podemos saber duas coisas fundamentais: a) se há outros tópicos que deveriam estar ali; e b) fica difícil saber de que forma organizar um currículo para a educação algébrica, e até mesmo se os tópicos tradicionais são tão relevantes quanto sua inclusão tradicional em currículos pode indicar." (LINZ E GIMENES, 1997, p.89).

A discussão sobre a relevância de certos conteúdos que tradicionalmente estão presentes nos currículos escolares é uma questão importante que deve permear a prática docente.

Sobre a educação algébrica podemos refletir sobre qual a importância ou validade de ensinar, no oitavo ano, a divisão de polinômios por polinômios, ou então sobre a possibilidade de ensinarmos sobre o algoritmo de Briot-Ruffini, já que a divisão de polinômio por binômio aparece com frequência quando buscamos raízes de equações ou zeros de funções, conteúdos estudados ao longo do nono ano do ensino fundamental.

CONCEPÇÕES SOBRE A ATIVIDADE ALGÉBRICA

De acordo com os PCNs (1998) há em geral um consenso de que para o aluno desenvolva um pensamento algébrico, há a necessidade de estar em contato com atividades que inter-relacionem diferentes concepções da atividade algébrica. O documento ainda cita, resumidamente (PCNs 1998, p.115), as seguintes interpretações da álgebra escolar:

a) Aritmética generalizada: **letras como generalização do modelo aritmético**, propriedades das operações, generalizações de padrões aritméticos;

b) Funcional: **letras como variáveis para expressar relações e funções**, variações de grandezas;

c) Equações: **letras como incógnitas**, resolução de equações;

d) Estrutural: **letras como símbolos abstratos**, cálculo algébrico.

Em seu trabalho Silva (2006) faz um estudo sobre as visões sobre álgebra presentes nos PCNs bem como relaciona estas visões com a de outros autores como Lins e Gimenez entre outros.

Silva (2006) destaca em suas conclusões que os PCNs seguem uma linha letrista da álgebra. Conforme Lins e Gimenez (1997) toda atividade algébrica centrada no uso das letras segue uma linha letrista da álgebra. No entanto Silva (2006) destaca que as atividades encontradas como sugestão nos PCNs seguem uma linha letrista facilitadora como também apontam Lins e Gimenez (1997).

A ASSOCIAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E ÁLGEBRA

Atualmente há uma tendência, verificada nos livros didáticos destinados ao 8º ano do ensino fundamental como, por exemplo, em Centurión, Jakubovic e Lellis (2007) ou em Orfali, Torkominan e Oliveira (2008) em associar o ensino do cálculo algébrico às representações geométricas.

A representação geométrica pode se constituir uma importante ferramenta para o entendimento de certos conceitos, com monômios e polinômios utilizados para representar áreas e volumes, conforme já indicam Brasil (1998):

> “No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas. O aluno também poderá ser estimulado a construir procedimentos que levam à obtenção das fórmulas para calcular o número de diagonais ou determinar a soma dos ângulos internos de um polígono.” (BRASIL, 1998, p.118).

Ainda nos PCN (1998) encontramos a ideia de que a visualização de expressões algébricas, por meio do cálculo de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem de noções algébricas.

Cabe ainda salientar que de acordo com os PCN (1998) a associação entre áreas de retângulos e quadrados com monômios e polinômios pode constituir uma limitação, pois muitas vezes não é possível construir um modelo geométrico simples para representar tais expressões algébricas. Limitamos com estas associações o trabalho com polinômios de grau máximo três, pois a partir daí não teremos a representação geométrica como estratégia de apoio.

Encontramos em Brasil (1998):

> "Além disso, é preciso que ele perceba que é possível atribuir outros significados às expressões. Assim, as "visualizações desse tipo podem ser interessantes em alguns momentos, dependendo do contexto da situação-problema, mas o trabalho não pode apoiar-se exclusivamente nelas." (BRASIL, 1998, p.121).

Encontramos em Oliveira (2002) uma sugestão de significação de inequações modulares baseada no conceito de distância, favorecendo, segundo a autora, a análise e a discussão do que o gráfico revela.

Lins e Gimenes (1997) chamam essas metodologias de facilitadoras, mas não creditam a elas muito sucesso. Para os autores, se por um lado estas abordagens substituem uma prática letrista por outro apresentam grandes problemas.

Os autores citam um estudo realizado por K. Hart e A. Sinkinson, duas pesquisadoras inglesas, que investigou o que ocorria quando as crianças passavam de atividades concretas relacionadas à solução de equações com o uso de balanças para atividades formais.

De acordo com as pesquisadoras inglesas as crianças apesar de julgarem útil a utilização do material concreto, não conseguiam estabelecer relação daquilo que fizeram na prática com a teoria de resolução de equações.

PEÇAS ALGÉBRICAS

Sugerimos aqui uma modificação no material ALGEPLAN, acrescentando a este, novas peças, nomearei esta remodelação de "Peças algébricas".

"Peças algébricas" está baseado, como citado, no ALGEPLAN, um material descrito no trabalho apresentado na III Bienal da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) em 2004, titulado "Algeplan como um recurso didático na exploração de expressões algébricas e fatoração", desenvolvido por Rosemeire Aparecida Rosa, Fernanda Mansur Dias, Letícia Thais Medeiros e orientado por Ermínia de Lourdes Campello Fanti.

O material concreto "Peças algébricas" objetiva permitir a relação de suas peças a expressões algébricas, servindo de apoio no ensino do cálculo algébrico, produtos notáveis e fatoração permitindo a associação álgebra/geometria.

"Peças algébricas" é composto por duas categorias: **"peças de preenchimento"** e "**peças de contorno"**, descritas a seguir.

PEÇAS DE PREENCHIMENTO

São peças que representarão a área de quadrados e retângulos, de lados genéricos, x, y, e 1 (unidade), podem ser confeccionadas com papel colorido ou qualquer outro material do gênero.

Quadrados de lado x (vermelho), com x^2 unidades de área, denotando o monômio x^2;

Quadrados de lado y (laranja), com y^2 unidades de área, denotando y^2;

Quadrados unitários (amarelo), com 1 unidade de área, denotando 1 (unidade);

Retângulos de dimensões x por 1, com x unidades de área, denotando o monômio x;

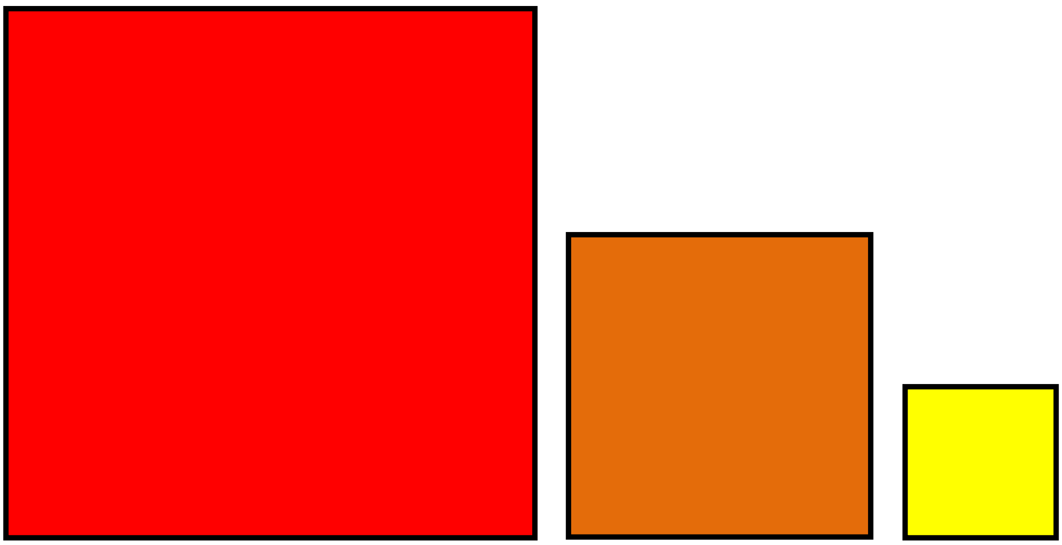
Retângulos de dimensões y por 1, com y unidades de área, denotando o monômio y

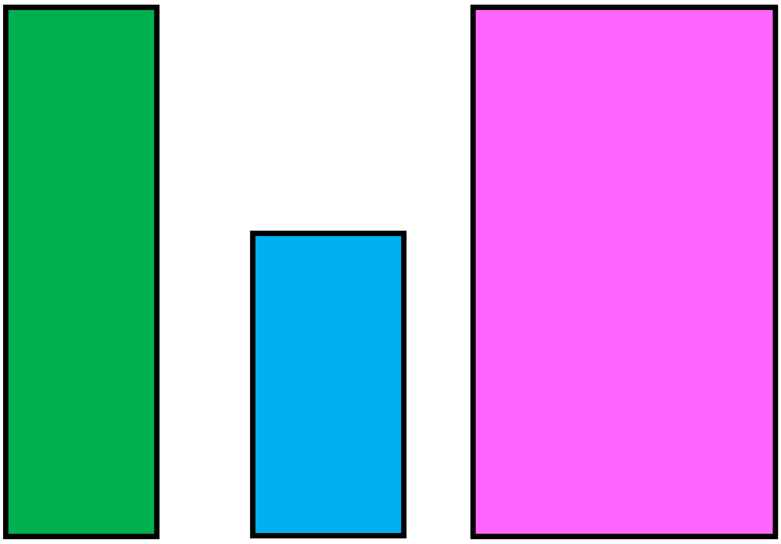
Retângulo de dimensões x por y (rosa), com xy unidades de área, denotando o monômio xy.

Nestas peças convencionam-se medidas tais que $1<y<x$. A figura 1 abaixo representa estas peças:

Figura 1 – Peças de preenchimento

Fonte: autores





PEÇAS DE CONTORNO

São peças que representam segmentos de medidas x, y e 1 (unidade) e servem para representar os lados e perímetro de quadrados e retângulos. Estas peças podem ser confeccionadas com canudos ou palitos de madeira coloridos. Deve-se convencionar as medidas de x y e 1 unidade tal como a medida adotada para os quadrados e retângulos, além de ser conveniente adotar a escolha da mesma cor.

As peças de contorno estão representadas na figura 2 abaixo.

Figura 2 – peças de contorno

Fonte: autores

Cabe a observação de que precisamos, sempre, explicitar a que tipo de peça estamos nos referindo, por que, por exemplo, para o monômio **x** temos duas peças distintas: x é a área do retângulo de dimensões x por 1 (unidade) e também o comprimento da peça de contorno x.

O material “Peças algébricas” foi testado em uma turma de 22 alunos de oitavo ano em uma escola pública, com uma sequência de atividades aplicadas.

Cabe ressaltar que previamente os alunos confeccionaram o material, familiarizando-se com ele e com o significado algébrico de cada peça. A turma também já havia estudado as operações com monômios e polinômios, os casos mais comuns de produtos notáveis abordados no plano de estudos (quadrado da soma, quadrado da diferença, produto da soma pela diferença, cudo da soma e cubo da diferença) e casos de fatoração (fator comum em evidência, agrupamento, fatoração da diferença de dois quadrados e fatoração dos trinômios quadrados perfeitos).

Nas atividades objetivamos levar os alunos a constatação de que a área dos retângulos pode ser representada pela soma das expressões algébricas representadas pelas peças de preenchimento, assim como o perímetro pode ser representado pela adição das expressões representadas pelas peças de contorno.

No caso da fatoração objetivamos levar o aluno a constatar, através da construção de retângulos, que a forma fatorada da expressão que representa a área da figura, constitui-se no produto das expressões que associamos à base e à altura do retângulo.

Nas atividades relacionadas a produtos notáveis o objetivo foi despertar a percepção de regularidades na construção dos quadrados.

A seguir, a série de atividades aplicadas e uma breve interpretação qualitativa dos resultados obtida através da análise do registro escrito e gráfico dos alunos.

CONSTRUINDO RETÂNGULOS COM PEÇAS DE CONTORNO

Atividade 1

i) Construa um retângulo com as seguintes peças de contorno

Base: 2 peças verdes (x), 1 peça azul (y).

Altura: 1 peça verde (x), uma peça amarela (1).

ii) Que expressão algébrica representa o perímetro do retângulo construído?

iii) Com as peças de preenchimento, preencha-o. Desenhe sua construção colorindo-a.

iv) Quais peças de preenchimento foram utilizadas para o preenchimento?

v) Descreva como você realiza o produto de (2x+y) por (x+1).

vi) Ao que você associa, neste caso, a expressão algébrica $2x^2+2x+xy+y$?

Nestas questões os alunos construíram de forma correta o retângulo, associando o polinômio 6x + 2y +2 ao seu perímetro, preencheram-no utilizando as peças de preenchimento. Citaram que realizariam o produto (2x+y) (x+1) utilizando a propriedade distributiva da adição em relação à adição, mencionando a própria propriedade ou frases como “multiplicaria um por todos e todos por um”.

Alguns alunos associaram a expressão $2x^2+2x+xy+y$ simplesmente ao produto de $(2x+y)$ por $(x+1)$ e não à área do retângulo, mostrando como sugerem Lins e Gimenez (1997) que não vinculam a situação prática com a teoria.

Os alunos demonstraram familiaridade ao uso do material e em sua maioria conseguiram associar as expressões algébricas, corretamente, ao perímetro e à área do retângulo.

CONSTRUINDO RETÂNGULOS COM PEÇAS DE PREENCHIMENTO

Atividade 2

i) Com as seguintes peças de preenchimento construa um retângulo: 2 peças vermelhas (x^2), 1 peça rosa (xy) e uma peça verde (x).

Desenhe sua construção, colorindo-a.

ii) Contorne o retângulo construído utilizando para isso as peças de contorno.

iii) Quais peças de contorno foram utilizadas:

a) na base do retângulo?

b) na altura do retângulo?

iv) Qual a forma fatorada da expressão?

v) Descreva uma estratégia para fatorar a expressão $2x^2+xy+x$ (exceto o uso do material).

Novamente aqui os alunos construíram corretamente o retângulo utilizando as peças de preenchimento, contornaram-no utilizando as peças de contorno. Associaram a expressão $2x+y+1$ à base do retângulo e a expressão x à altura (ou vice-versa). Descreveram que estrategicamente procurariam um fator comum no polinômio $2x^2+xy+x$ e o colocariam em evidência. Em alguns escritos percebe-se uma dificuldade em associar no caso o produto $x(2x+y+1)$ (da base pela altura do retângulo) como forma fatorada da expressão $2x^2+xy+x$, novamente não realizando a associação entre prática e teoria.

CONSTRUINDO RETÂNGULOS COM PEÇAS DE PREENCHIMENTO

Atividade 3

i) Com as seguintes peças de preenchimento construa um retângulo: 2 peças laranja (y^2), 4 peças rosa (xy), 2 peças verdes (x), 1 peça azul (y).

Desenhe sua construção, colorindo-a.

ii) Contorne o retângulo construído utilizando para isso as peças de contorno.

iii) Quais as peças utilizadas:

a) na base do retângulo?

b) na altura do retângulo?

iv) Qual a forma fatorada da expressão $2y^2+4xy+2x+y$?

v) Descreva uma estratégia para fatorar a expressão $2y^2+4xy+2x+y$ (exceto o uso do material).

Nestas questões, as construções foram feitas de forma satisfatória, e pelas semelhanças com a questão anterior os resultados foram análogos. Novamente alguma dificuldade em interpretar e aceitar base versus altura do retângulo como forma fatorada da expressão $2y^2+4xy+2x+y$, e a descrição da técnica de agrupamento para fatoração da expressão. Surgiram escritos como "Usando o agrupamento. Eu pego os que têm fator comum e junto num grupo e os outros também junto em outro grupo".

CONSTRUINDO RETÂNGULOS

Atividade 4

i) É possível construir um retângulo com 1 peça vermelha (x^2), duas peças verdes (x) e uma peça azul (y)? Justifique sua resposta.

ii) O que você pode dizer sobre fatorar a expressão algébrica x^2+2x+y?

Nesta atividade, os alunos constataram a impossibilidade de construir retângulos citando em sua maioria que a "peça azul sobraria", mas demonstraram através do registro escrito e oral que não conseguiram associar a impossibilidade de construção do retângulo com a impossibilidade de fatorar o polinômio x^2+2x+y.

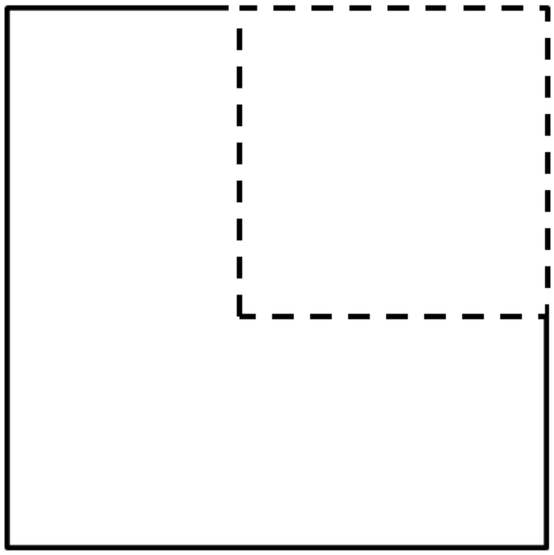
RECORTANDO QUADRADOS

Atividade 5

i) Da peça vermelha (x^2) retire, recortando, uma parte equivalente a peça laranja (y^2). Veja a figura 3 abaixo:

Figura 3 – Atividade 5 (i)

Fote: autores

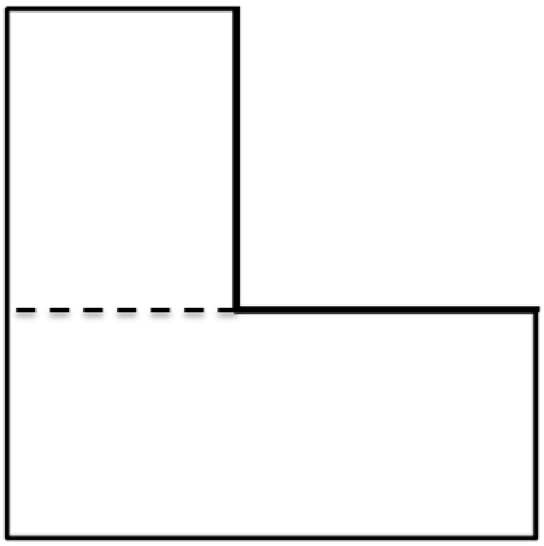


ii) Que expressão algébrica você associa a "nova peça" formada?

iii) Faça um novo corte conforme o indicado pela linha pontilhada, na figura 4, e com as "duas novas peças" construa um retângulo. Desenhe sua construção.

Figura 4 – Atividade 5 (iii)

Fonte: autores



iv) Utilizando as peças de contorno x e y, faça medições e conclua qual a medida:

a) Da base do retângulo.

b) Da altura do retângulo

v) Qual a forma fatorada da expressão x^2-y^2?

Uma das limitações no uso deste material é a representação de expressões negativas, uma estratégia para a representação da expressão x^2-y^2 foi à associação do sinal negativo como retirada da peça vermelha (x^2) uma porção igual à peça laranja (y^2). Alguns alunos não associaram a expressão x^2-y^2 como representação da área da “nova peça” formada. Bem como tiveram a mesma dificuldade em concluir que um dos lados do retângulo formado media x-y.

CONSTRUINDO QUADRADOS COM PEÇAS DE CONTORNO

Atividade 6

i) Construa um quadrado com as seguintes peças de contorno para compor cada lado do quadrado: 2 peças azuis (y), 1 peça amarela (1).

ii) Preencha o quadrado com as peças de preenchimento.

iii) ilustre sua construção

iv) Que expressão representa a área do quadrado construído?

v) Que polinômio obtemos ao efetuarmos $(2y+1)^2$?

CONSTRUINDO QUADRADOS COM PEÇAS DE PREENCHIMENTO

Atividade 7

i) Com as seguintes peças de preenchimento construa um quadrado: 1 peça vermelha (x^2), 2 peças rosa (xy) e 1 peça laranja (y^2).

ii) Contorne seu quadrado, utilizando as peças de contorno.

iii) Desenhe sua construção, colorindo-a.

iv) Qual a forma fatorada da expressão $x^2+2xy+y^2$?

v) Você destacaria alguma regularidade na construção dos quadrados? Qual

Nas atividades 6 e 7 o objetivo de levar os alunos à constatação da regularidade na construção dos quadrados foi parcialmente alcançada e verificada em escritas como “preciso utilizar alguns retângulos para construir os quadrados, só com quadrados não consigo, a não ser que eu utilize apenas peças iguais”.

QUADRADOS

Atividade 8

i) Geometricamente, através do uso das peças, com você justifica o erro $(x+2)^2 = x^2 + 4$?

Lins e Gimenez (1997) apontam:

> “David Kirshner, por exemplo, sugere que nem sempre interpretamos as operações algébricas como binárias, e sugere que produzamos – por exame da prática de especialistas – uma nova “gramática algébrica”; em particular, Kirshner defende que seres humanos não processam a álgebra seguindo regras – como faz parecer a visão normativa da atividade algébrica –, e sim, segundo uma atividade de reconhecimento de padrões. Dessa forma ele argumenta, pode-se entender uma aplicação incorreta de uma propriedade distributiva como em “$(a+b)^2=a^2+b^2$”. (LINS E GIMENES, 1997, p.101).

Verifiquei nas respostas dadas pelos alunos que no geral associaram o erro na expressão à impossibilidade de construção de um quadrado com uma peça vermelha e quatro peças amarelas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerar atividades que associem áreas e perímetros de retângulos e quadrados às expressões algébricas, ainda que sejam atividades com certas restrições, constitui-se em uma boa alternativa em substituição a atividades puramente letristas.

O uso do material “Peças algébricas”, no geral, despertou o interesse e a curiosidade dos alunos, as atividades objetivaram permitir a relação entre construções geométricas e expressões algébricas e no geral este objetivo foi atingido.

Obviamente um estudo que investigue o porquê muitas vezes a relação do que é feito na prática com o material concreto não é “transferido” para atividades formais de pensamento algébrico exige maior profundidade do que a atingida neste artigo.

Uma possível prática que facilite essa relação é a simultaneidade entre a construção com o material e o registro escrito das ideias, proporcionando a vinculação das atividades com a teoria estudada.

Cabe salientar que a divulgação desta experiência de sala de aula, assim como a divulgação da análise e interpretação de resultados obtidos foi autorizada para fins pedagógicos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo; CENTURIÓN, Marília. **Matemática na Medida Certa:** 8º Ano/ 7ª Série. São Paulo: Scipione, 2007.

LINS, Romulo Campos; GIMENES, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

OLIVEIRA, Ana Tereza de. **Reflexões sobre a aprendizagem de álgebra**. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 12, p.35-39, jun. 2002.

ORFALI, Fabio; TORKOMINAN, A. L.; OLIVEIRA, Carlos de. **Matemática:** 8 ano. São Paulo: SM, 2008.

ROSA, Rosemeire Aparecida; DIAS, Fernanda Mansur; MEDEIROS, Letícia Thaís. **O Algeplan como um recurso didático na exploração de expressões algébricas e fatoração**. Pôster apresentado na III Bienal da SBM. Disponível em: <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/poster/rosimeire.pdf>. Acesso em: 07 jun. 2011.

SILVA, Maria Helena da**. Estudo das visões sobre álgebra presentes nos parâmetros curriculares nacionais de matemática do ensino fundamental em relação a números e fatoração.** 2006. 146 f. Dissertação (Mestrado) - Puc-Sp, São Paulo, 2006. Disponível em: < http:// www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/maria_helena_silva.pdf >. Acesso em: 07 jun. 2017.