MODELAGEM MATEMÁTICA COM MOEDAS E UM COPO DE ÁGUA: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Veronice Maria Kawalek[1]

Vanessa Gonçalves Vieira[2]

Adriana Sbardelotto Di Domenico[3]

MODELAGEM MATEMÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resumo: Este trabalho relata uma experiência realizada com uma turma de acadêmicos de Licenciatura do Campo, com habilitação para o ensino de matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Dois Vizinhos-PR. Esta experiência compreende uma oficina realizada, que tinha por objetivo apresentar uma visão teórica da modelagem matemática no ensino, e em seguida resolver uma problemática: Como estimar a variação do nível e do volume de água em um copo de formato cilíndrico reto, com o acréscimo de moedas. Os materiais utilizados foram: moedas, régua, caderno, copo com formato cilíndrico reto e computador com o software Excel. A partir da problematização seguiu-se as etapas da modelagem até a obtenção dos modelos para o nível e volume de água no copo. Procedeu-se a escolha do modelo que melhor representava os dados, a validação destes modelos e a previsão (dedução) de resultados. Ao final da oficina os participantes fizeram uma avaliação qualitativa, e disseram que esta foi muito proveitosa, que desconheciam a tendência da modelagem matemática, tanto na visão teórica quanto prática, e que poderiam utilizar práticas como a desenvolvida na oficina posteriormente nas escolas e ainda sugeriram que sejam realizadas oficinas semelhantes a essa mais vezes.

Palavras Chaves: Modelos matemáticos. Ensino-aprendizagem. Prática de ensino.

INTRODUÇÃO

É comum que as crianças, antes de entrar na escola já ouçam frases como: “a matemática é chata”, “odeio matemática”, “não consigo ver aplicações na matemática”, “não gosto das aulas de matemática” e acabem se convencendo de que realmente esta matéria é difícil, sem mesmo, ter contato com ela. Estes pré-conceitos da matemática consistem em um grande desafio para os atuais e futuros educadores, sendo necessário, desenvolver novas práticas de ensino que motivem o interesse dos alunos a aprendizagem, transformando esta visão da matemática. Segundo Bicudo e Borba (2012) cabe aos educadores à tarefa de auxiliar os alunos a entenderem a matemática de forma natural, interessante e útil para que a aprendizagem desta seja de mais fácil compreensão.

---

[1] Graduanda em Licenciatura em Educação do Campo. Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Campus Dois Vizinhos. verocawalek@outlook.com

[2] Graduanda em Licenciatura em Educação do Campo. Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Campus Dois Vizinhos. vanessavieira327@hotmail.com

[3] Professora do Magistério Superior do Curso de Licenciatura em Educação do Campo. Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Campus Dois Vizinhos. domenico@utfpr.edu.br

Muitas vezes no entendimento de quem está ensinando, o conteúdo está claro, como explica Barbosa (2012, p.12):

> Até aqui, ao ensinar matemática para os alunos, não entendia muito bem porque eles não aprendiam se estava tudo na cara, como eu dizia a eles. Depois de dizer tantas vezes que estava na cara comecei a perguntar para mim mesma na cara de quem? (BARBOSA, 2012, p.12).

A forma como o professor explica, muitas vezes é abstrata para o aluno, e este não consegue visualizar aplicabilidade da matemática no seu dia a dia. Nesse sentido, Junior (2015) afirma que os alunos querem saber em quais situações do cotidiano usarão os conteúdos apreendidos nas aulas, fato que confronta à metodologia tradicional de ensino, baseada em um conjunto de regras e técnicas, na qual somente o caráter mecânico de resolução de exercícios tem ênfase. Este mesmo autor reforça que os conteúdos descontextualizados da realidade, dificultam a aprendizagem, fazendo com que o aluno apenas decore o conteúdo para as provas.

Assim a contextualização dos conteúdos e as diferentes metodologias de ensino podem melhorar o processo de ensino-aprendizagem da matemática. De acordo, com a Base Nacional Curricular Comum - BNCC (2016, p.232) "a aprendizagem em matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações". Devendo-se levar em conta o conhecimento prévio do aluno e a partir desse, construir e problematizar situações que possibilitem observar de forma quantitativa (matemática) e qualitativa a realidade.

Dentre as tendências metodológicas de ensino da matemática esta a modelagem. Segundo as Diretrizes as Curriculares para a Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná -DCES (2008), a modelagem matemática tem como objetivo analisar e discutir situações do cotidiano por meio de modelos, e no ensino, esta tendência possibilita o uso problemas aplicados à realidade do aluno no desenvolvimento de conteúdos matemáticos.

Segundo Biembengut e Hien (2016) através de problemas modelados, os alunos conseguem ver significados, tanto da teoria, quanto da natureza do problema, indo além da simplicidade de resolver questões com cálculos puramente mecânicos em sala de aula. Estes autores definem a modelagem matemática como:

> O processo que envolve obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT E HIEN, 2016, p.12)

Nesse sentido, Bassanezi (2002) enfatiza que a modelagem pode ser entendida como a arte de transformar problemas reais em problemas matemáticos. Para Barbosa (2001) a modelagem matemática no ensino propicia um ambiente, no qual os alunos se sentem motivados a apreender e são instigados a questionar fatos do cotidiano ou outras áreas da realidade.

Kluber e Burak (2007) descrevem que o ensino através da modelagem matemática, propicia a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento, o uso de diferentes conteúdos da matemática em um mesmo problema e, além disso, a contextualização dos conteúdos com situações reais. O que vêm de encontro com as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, que afirmam que o ensino não deve causar a fragmentação de saberes, pois estes possuem relações, não devendo os conteúdos ensinados, serem trabalhados apenas de forma isolada (BRASIL, 2002).

Para a realização da modelagem matemática segue-se alguns passos. Conforme Almeida e Dias (2002) o primeiro passo consiste em definir o problema; o segundo é selecionar as variáveis de maior relevância; o terceiro é pensar no modelo que irá melhor se adequar a situação problematizada; o quarto compreende a utilização dos conteúdos matemáticos para resolução do problema; o quinto a verificação da validade do modelo; e o sexto e último passo envolve a aplicação do modelo encontrado através de previsões, deduções, esclarecimentos e determinações da situação problema.

Diante da necessidade de desenvolver e compartilhar novas práticas de ensino, que possam melhorar o processo de ensino aprendizagem da matemática, desenvolveu-se uma oficina com futuros professores da matemática, cujo desenvolvimento é detalhado a seguir.

RELATO DE EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM MATEMÁTICA

A experiência foi realizada através de uma oficina que abordou teoricamente conceitos sobre a modelagem matemática, com uma turma do quinto período do curso de Licenciatura em Educação do Campo, com habilitação para o ensino de matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná- Câmpus Dois Vizinhos, sendo desenvolvida por duas acadêmicas também deste curso, voluntárias de um projeto de pesquisa sobre novas metodologias de ensino da matemática através das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) e Modelagem Matemática.

O objetivo da oficina realizada foi desenvolver uma prática de ensino, envolvendo a construção de funções ligadas ao do cotidiano dos alunos, utilizando-se da tendência da modelagem matemática. A problematização da atividade de modelagem foi: como estimar a variação do nível e do volume de água no copo, com o acréscimo de moedas? Conforme o primeiro passo da modelagem descrito por Almeida e Dias (2002).

Para o desenvolvimento desta atividade de modelagem matemática utilizou-se vinte moedas de 1(um) real, uma régua, caderno para anotações, e um copo com formato de cilindro reto, com um nível inicial de água de 4 cm, e um computador com o software Excel para cada participante, conforme Figura 1.

Figura 1: Material usado na oficina

Fonte: Autoria própria.

Observou-se com os alunos participantes da oficina que a altura da água aumentava e consequentemente o volume, à medida que moedas eram acrescentadas no copo. Nesse momento foram definidas as variáveis envolvidas (número de moedas, nível e volume da água), compreendendo o segundo passo da modelagem descrito por Almeida e Dias (2002). A tabela 1 representa as aferições do nível de água do copo e do volume com o acréscimo das moedas. Os valores do volume foram calculados, por meio da fórmula: $V=\pi r^2 h$ (sendo: V o volume total, $\pi = 3{,}14$, r o raio do copo e h a altura da água) após a mensuração com régua, considerou-se o valor do raio do copo 3 (três) cm.

Tabela 1: Variação do nível e do volume de água no copo com o acréscimo de moedas

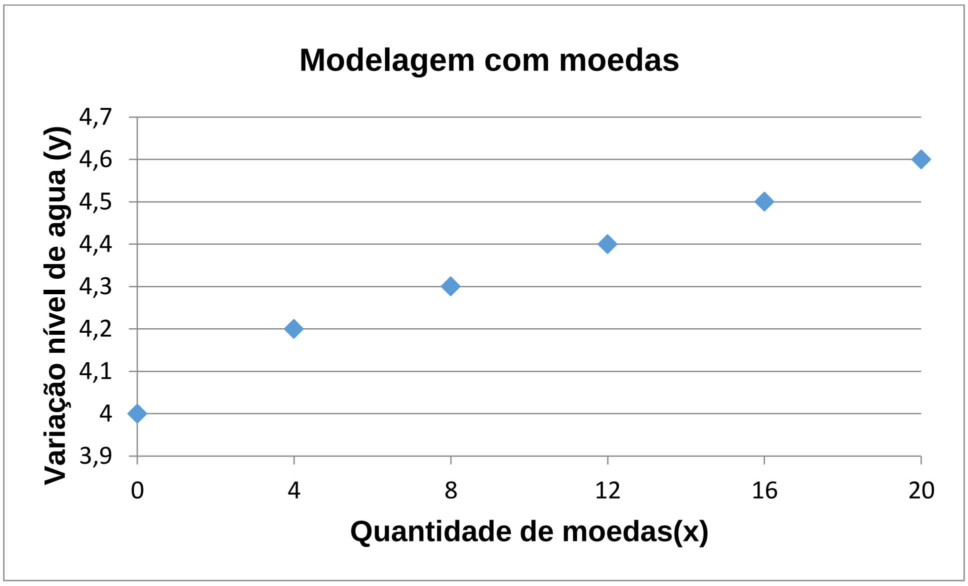
Modelagem com moedas		
Número de Moedas(x)	Nível de água (y)	Volume de água(cm^3)
0	4,0	113,04
4	4,1	115,86
8	4,2	118,69
12	4,3	121,51
16	4,5	127,17
20	4,6	129,99

Fonte: autoria própria

Para realização do terceiro e quarto passo da modelagem descrito por Almeida e Dias (2002), utilizou-se o software Excel, para a construção dos modelos matemáticos (funções) que relacionavam os dados. Primeiramente, selecionando os dados (número de moedas (x) e nível de água (y)) da tabela, e a seguir na guia do Excel opção inserir, escolheu-se gráfico tipo dispersão, assim obteve-se um gráfico que representava os dados, no qual ajustou-se os títulos dos eixos e as escalas conforme apresentado na Figura 2.

Posteriormente, explicou-se para os alunos participantes clicarem em um dos pontos deste gráfico, com o botão direito do mouse, em seguida foram orientados a escolher a opção adicionar linha de tendência. E a partir disso, definir um modelo matemático (uma função) que relacione os dados número de moedas (x) e nível de água (y), com o melhor ajuste possível. Mas, indagou-se aos participantes como se saberia qual o melhor modelo?

Figura 2: Gráfico tipo dispersão da variação do nível de água.

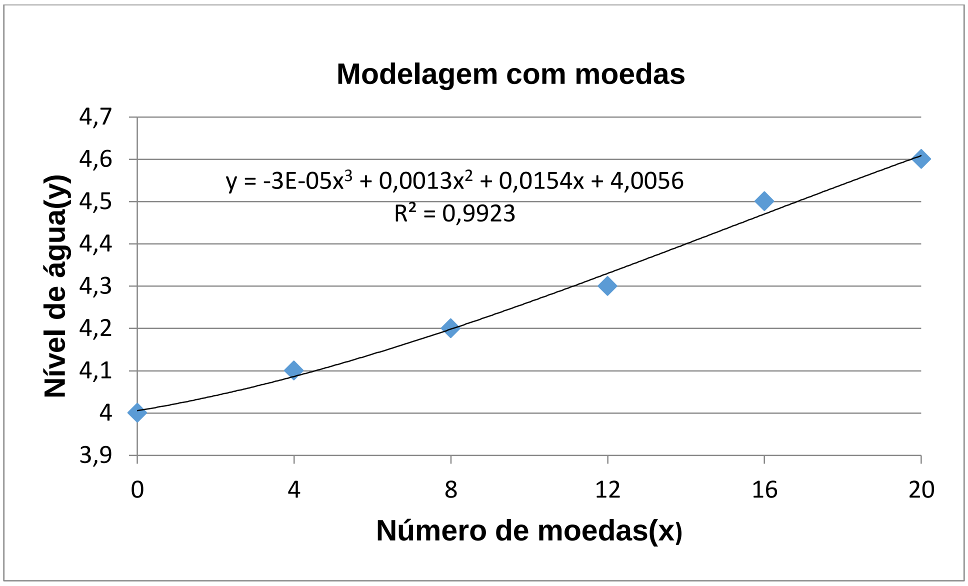


Fonte: autoria própria

Para escolher a função que representa o modelo matemático que melhor se ajusta aos dados, clica-se com o botão direito do mouse, novamente em um dos pontos do gráfico (Figura 2), seleciona-se a opção formatar linha de tendência, e as opções: linear, exibir equação do gráfico, exibir o valor de R-quadrado no gráfico. Após a seleção dessas opções, obteve-se a função linear y=0,0286x+4,0476, com R^2 de 0,9796. Para aferir se esta função é a que melhor representa os dados, explicou-se aos alunos que se deve observar o valor de R^2, e quanto mais próximo de 1,00 é este, melhor a função se ajusta aos dados.

Realizou-se vários testes com as outras funções disponíveis: exponencial, logarítimica, polimonimial de grau 2 e 3, e percebeu-se que a função mais adequada, apresentando R^2 0,9923, foi a polinomial de ordem 3, confome Figura 3. Com modelo matemático $y = -0{,}00003x^3 + 0{,}0013x^2 + 0{,}0154x + 4{,}0056$, sendo esta uma função cúbica (polinômio de terceiro grau). Questionou-se aos alunos o que aconteceria se testassemos uma polinomial de ordem 4? Nesse caso, estes perceberam que os valores de R^2 ficaram ainda mais próximos de 1, porém explicou-se a eles que em práticas com dados experimentais reais como a realizada, recomenda-se o uso de funções polinomiais de ordem no máximo 3, por serem funções mais simples de entendimento e interpretação real. Em seguida, realizou-se a validação do modelo matemático encontrado, quinto passo da modelagem descrito por Almeida e Dias (2002), inserindo a equação (fórmula) do mesmo em uma terceira coluna do software excel, obtendo-se os dados da tabela 2.

Figura 3: Gráfico linha de tendência polinomial ordem 3



Fonte: autoria própria

Explicou-se aos alunos que os dados reais do nível de água (coluna 2) diferem minimamente dos dados apresentados pelo modelo matemático (coluna 3), conforme Tabela 2, essa diferença ocorre porque o modelo se ajusta aos dados em 99,23%(R^2 0,9923) e não em 100% (R^2=1). E que quando se trabalha com modelagem geralmente ocorrem estas situções. Segundo Sodré (2007), um modelo matemático consiste em uma simplificação de uma situação real, contudo as características essenciais desta devem estar presentes nesse modelo matemático, de modo que, o comportamento através do modelo seja igual ou semelhante da situação real.

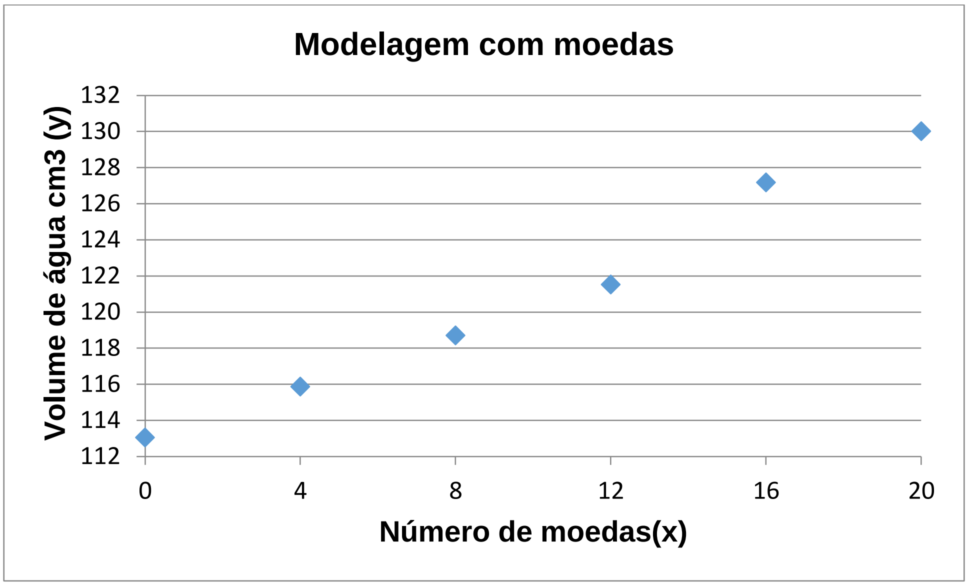
Tabela 2: Validação do modelo matemático para nível de água no copo

Modelagem com moedas		
Número de Moedas(x)	Nível de água (y)	Resultados do modelo matemático
0	4,0	4,04
4	4,1	4,22
8	4,2	4,35
12	4,3	4,44
16	4,5	4,53
20	4,6	4,63

Fonte: autoria própria

Em seguida, procedeu-se ao segundo item da problematização que consistia na variação do volume de água do copo com o acréscimo das moedas, cujos dados já foram apresentados na Tabela 1. Para realizar a modelagem destes dados selecionou-se as colunas número de moedas (x) e volume da água (y) em cm^3, no software Excel e na guia inserir escolheu-se a opção gráfico tipo dispersão, em seguida ajustou-se os títulos dos eixos e as escalas do gráfico, conforme Figura 4.

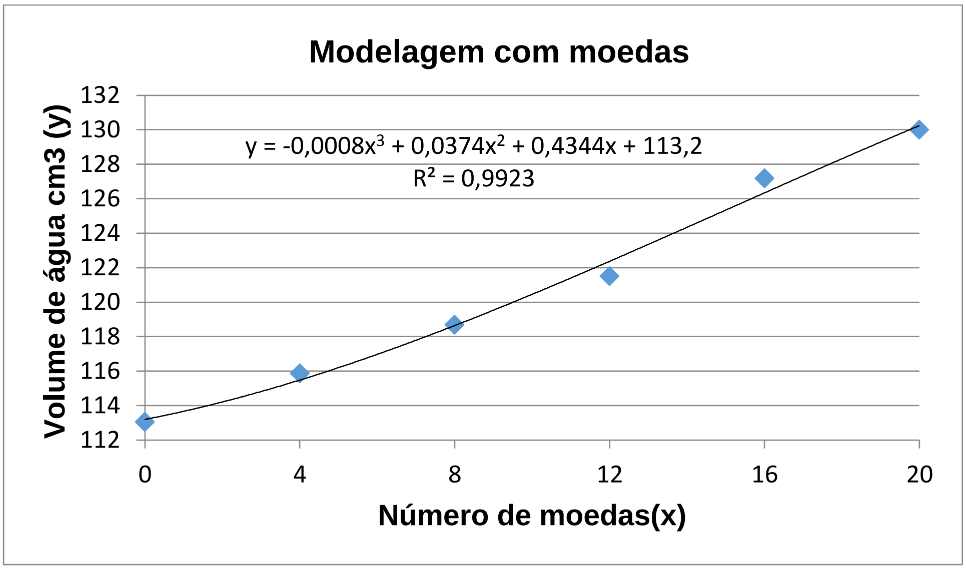
Figura 4: Gráfico da modelagem variação do volume de água com o acréscimo de moedas



Fonte: autoria própria

Da mesma forma como no exemplo anterior (número de moedas (x) e nível de água (y)), inseriu-se a linha de tendência, clicando com o botão direito em um dos pontos do gráfico e testou-se os modelos matemáticos possíveis verificando o parâmetro R^2. O modelo que melhor se ajustou aos dados foi $y = -0,0008x^3 + 0,0374x^2 + 0,4344x + 113,2$ (Figura 5), sendo escolhido por possuir o maior valor de $R^2 = 0,9923$. Em seguida, realizou-se a validação do modelo comparando os resultados gerados por este aos dados reais, Tabela 3.

Figura 5: Gráfico da modelagem com a linha de tendência polinomial ordem 3



Fonte: autoria própria

Tabela 3: Validação do modelo matemático para o volume de água no copo

Modelagem com moedas		
Número de Moedas (x)	Volume de água cm^3 (y)	Resultados do modelo matemático
0	113,04	113,20
4	115,86	115,48
8	118,69	118,66
12	121,51	122,42
16	127,17	126,45
20	129,99	130,45

Fonte: autoria própria

Diante dos modelos matemáticos encontrados para o nível de água e volume, questionou-se os alunos participantes, sobre como poderiam ser trabalhados conteúdos e conceitos matemáticos, conforme o último passo da modelagem de Almeida e Dias (2002). Apontou-se que poderiam ser problematizadas questões como por exemplo: Quantas moedas é preciso acrescentar para obter um nível de água de 5cm? Ou se o nível de água do copo fosse 4,5 cm, quantas moedas deveriam ser retiradas para reduzir a altura da água para 4 cm. Qual a média de variação do nível e do volume de água a cada moeda que é acrescentada? Quantas moedas devem ser acrescidas para encher o copo. Também pode-se trabalhar com os gráficos, classificar como crecentes ou decrescentes, discutir e definir o domínio e a imagem das funções encontradas, definir qual a variável livre e qual a variável dependente. Também poderia-se indagar sobre o número de moedas que devem ser acrescidas para se obter o volume de 120 mL, relacionando as unidades de medida (mL= cm^3).   .

Ao se trabalhar com o copo de água, modelo simplicado de cilindro reto, pode-se trabalhar com conceitos geométricos de volume, área da base, diâmetro e raio, ao mesmo tempo que, com funções e unidades de medidas, o que vêm de encontro com a visão de Kluber e Burak (2007) da modelagem matemática, que possibilita inter-relações entre diferentes conteúdos matemáticos em uma mesma situação problema.

CONSIDERAÇÕES DA EXPERIÊNCIA REALIZADA

Para finalizar as atividades, os alunos participantes foram convidados a realizar uma avaliação qualitativa sobre a oficina realizada, descrevendo quais seus respectivos conhecimentos do assunto e o que apreenderam com a oficina.

Todos elogiaram a atividade desenvolvida na oficina, e disseram que esta foi muito proveitosa, tanto para o conhecimento da tendência da modelagem matemática no ensino, quanto para o conhecimento do software Excel, pois relataram que desconheciam a utilidade deste software em sala de aula, e ficaram surpreendidos que este poderia ser usado como ferramenta de modelagem para construção de funções.

Alguns alunos em seus comentários descreveram ainda que: “Atividades como esta são importantes para que o aluno possa sair da rotina da sala de aula, com quadro negro e giz (Aluno 1)”; “É bom que o ensino possa ter esse caráter tanto dinâmico, quanto tecnológico, usando recursos diferentes do que estamos acostumados (Aluno 2)”; “Poderiam ser realizadas mais oficinas como esta, para podermos aprofundar melhor nossos conhecimentos sobre esta tendência de ensino e ter mais domínio no manuseio do Software Excel (Aluno 3)”; “O fato de utilizarmos os meios tecnológicos para complementar as atividades de ensino desenvolvidas em sala de aula, nos ajudará como futuros professores (Aluno 4)”; “A oficina foi bem proveitosa, usaria na sala de aula com meus futuros alunos, apenas me aprofundaria mais sobre o assunto (Aluno 5)”; “Durante o desenvolvimento da oficina foi possível uma grande interação entre a turma e as acadêmicas que ministraram, fato que propiciou um maior aprendizado, por isso gostei desta prática de modelagem matemática (Aluno 6)".

Por meio dos comentários descritos percebe-se que a oficina foi muito apreciada pelos participantes, havendo sugestões de que mais oficinas sejam realizadas. Afinal é necessário desenvolver e compartilhar as práticas de ensino para que os futuros professores possam assim, fazer uso destas em sala de aula, dinamizando as formas de ensinar os conteúdos matemáticos. Bem como, á partir do conhecimento de práticas como esta, possam estes ter ideias para desenvolver novas práticas de ensino, buscando assim, melhorar o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R**. Modelagem Matemática em sala de aula**. Notas de aula. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina: UEL, 2002.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: concepções e experiências de futuros professores.** 2001. 253 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas,Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, A. A. S. "**Modelagem matemática: relatos de professores."**- Curitiba, 2012, 378 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas)- Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba,2012.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BICUDO, M. A. V.; BORBA, M.C. **Educação Matemática pesquisa em movimento.** 4.ed.- São Paulo: Cortez, 2012.

BIEMBENGUT, M.S., HEIN, N., **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed.,5ª reimpressão. – São Paulo: Contexto,2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC.** Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec. gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2017.

BRASIL. ***Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica***. Ministério da educação. Secretária de Educação Básica. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. 562p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 30 abr. 2017.

KLUBER, T. E.; BURAK, D. Modelagem matemática: pontos que justificam sua utilização no ensino. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática - IX ENEM, 2007, Minas Gerais. **Anais**. Disponível em: <file:///C:/Users/Igor/Downloads/MM_utilizacao_no_ensino_kluber_burak.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2016.

JÚNIOR, H.R; **A Importância da Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem,** Catalão, Goiais, 2015. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.

PARANÁ, Secretária de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes curriculares da educação básica**, **Matemática** - DCES. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 05 jun. 2017.

SODRÉ, U. **Modelos Matemáticos**. Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Londrina-PR, 2007. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf >. Acesso em: 07 jun. 2017.