NO CAMINHO DA GEOMETRIA OU A GEOMETRIA PELO CAMINHO?

Susilene Garcia da Silva Oliveira[1]

Juliana Alves de Souza[2]

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: Há mais de 20 anos Pavanello (1993), Lorenzato (1995) e outros pesquisadores do campo da Educação Matemática já descreviam a Geometria e seu abandono em sala de aula. Ainda hoje é possível escrevermos sobre tal tema, o ainda abandono da geometria pode ser sentido nas aulas, o drama de um passado que parece não estar tão distante. Ao acompanharmos as dificuldades históricas de se trabalhar com a geometria talvez encontremos os problemas para o seu "abandono". Não temos a intenção de mostrar aqui essas causas e sim apenas tentar, em uma trajetória temporal, explicitar os passos dados por este campo partindo da experimentação para chegarmos a demonstração, para isso são trazidas algumas atividades e explorações possíveis sobre elas.

Palavras Chaves: Geometria. Experimentação. Demonstração. Livro didático.

E o começo foi... Ou ainda é

Os filósofos da Grécia Clássica estruturaram a matemática como um modo de pensar, que ao longo da história teve papel central na maneira como o homem entende o mundo — o que induziu os gregos a tratá-la como a essência do conhecimento.

Mas por que optamos por iniciar pela Grécia quando houve ainda os egípcios e suas marcações de terras ao longo do Vale do Nilo, os babilônicos e a descoberta de uma matemática prática? A evolução da matemática e consequentemente da geometria sofreu uma mudança de rumo na Grécia Antiga deixando de lado seu caráter concreto e prático passando a ser essencialmente abstrata, com formato de ciência organizada de maneira sistemática. Se olharmos para o passado e acompanharmos a "evolução" do pensamento geométrico quando passamos de uma civilização a outra (figura 1) percebemos que se faz necessário passar por estágios. Eles nos dão a dimensão do quanto a história explica movimentos posteriores no ensino e aprendizagem desse campo.

[1] Doutoranda do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). UFMS, susi-lene@hotmail.com.

[2] Doutoranda do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). UFMS, jullyana_allves@hotmail.com.

Figura 1. Civilizações antigas e a geometria

Fonte: as autoras.

Iniciaremos nossa busca por respostas pelos pensadores gregos, mas precisamente por Platão e a sua visão de que a matemática está em toda parte. Com ele foi possível distinguir o “mundo real”, onde vivem os objetos sensíveis, do “mundo das ideias”, alcançado por meio da razão. Para Platão as entidades geométricas existem como objetos independentes do mundo real. Isso influenciou na noção de demonstrações na qual somente o uso do raciocínio dedutivo passou a ser permitido. No entanto, seu discípulo mais famoso, Aristóteles, tinha uma ideia diferente, para ele os objetos existiam como abstrações do mundo real e dependiam dessa existência. Aristóteles entendia a ciência dedutiva como um edifício que precisava ser estruturado sobre pressupostos não demonstrados e desencadeado por relações lógicas. A partir desses dois filósofos, que poderiam ser considerados tão diferentes, surge Euclides, herdeiro de uma tradição matemática e autor de *Os Elementos*, um livro que representa um marco para a geometria. Nos Elementos de Euclides,

> os teoremas (e os problemas), depois de enunciados, têm dissecadas a *hipótese*, aquilo que é dado, que se supõe válido, e a *tese*, o que se quer provar, aceita a hipótese. A separação clara dessas partes é fundamental em qualquer nível do ensino, pois não é infrequente observar-se um estudante tentando demonstrar um resultado, sem ter a mínima ideia quanto ao que é dado e ao que é buscado (BICUDO, 2005, p. 70).

Separar hipótese e tese e fazer uma distinção são encaminhamentos que talvez tenhamos que discutir na educação básica. E se torna importante dar um significado aos termos que fazem parte desse campo: definição, hipótese, tese, postulado, lema, axioma, etc. Eles precisam ser entendidos na sua essência e diferença. Provas, argumentações, explicações também. Definição é um encadeamento de palavras conhecidas que dará sentido a um conceito, conceito esse que pode ser utilizado na demonstração, sequência de deduções lógicas e formais que permitem concluir a verdade, que fazem com que um teorema seja aceito. Às vezes nessa demonstração necessitamos de postulados, proposição verdadeira aceita sem discussão e necessárias para se construir a geometria. Mas ainda nos resta diferenciar prova, demonstração e explicação. Recorreremos a Balacheff (1988) e diremos que explicação é todo discurso defendido por um indivíduo ou um grupo em que o objetivo é comunicar a outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. Provas são explicações aceitas por um grupo dado, num momento específico. Assim uma explicação pode configurar numa prova para um grupo social e não para outro. Demonstrações são provas particulares que são aceitas pela comunidade dos matemáticos e que devem obedecer a certas regras lógicas bem definidas.

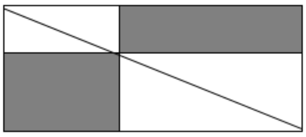
Com os gregos aprendemos teoremas, e todos os termos que acompanham a geometria euclidiana, passamos por mudanças no modo de pensar por conta das diferentes civilizações que estiveram no poder, na detenção do conhecimento. No entanto, o que temos nos Elementos de Euclides não pode ser mudado, os teoremas provados foram utilizados para demonstrar e enunciar outros teoremas, a geometria apresentada motivou o aparecimento de outra geometria, a não euclidiana.

Mas como olhar para isso tudo estando nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio? Como usar a história para explicar movimentos de mudanças? Não temos a intenção de responder tais questionamentos, mas de apresentar alguns fatos que podem ao final ajudar a escolher alguns caminhos para que isso aconteça. E talvez minimizar o tecnicismo herdado não de Euclides, mas talvez de um movimento da matemática moderna pouco compreendida, como a maioria das mudanças no ensino que passamos ao longo desses 20 anos. É preciso, parafraseando Chevallard, encontrar o elo perdido entre uma escrita democrática e as demonstrações, voltar as experimentações que exercem um papel importante nas demonstrações.

Experimentação e demonstração na educação básica

Experimentar parece ser um verbo que nos remete ao início, experimentar algo é sempre uma primeira sensação e, pensando assim podemos olhar para o caminhar da geometria na antiguidade: experimentação e prática (babilônios e egípcios) passando a organização lógica das demonstrações (gregos). Seguindo a história, poderia ser esse o caminho a ser traçado em sala de aula na educação básica. Experimentar as atividades de geometria, Duval já nos falava que este é um campo fértil para isso. Pode-se pensar em atividades que levariam os alunos a experimentar, conjecturar, falar, investigar e ao final apresentar, mesmo que de modo informal, um resultado. Utilizaremos uma atividade para melhor explicar.

1°- Na figura abaixo, por um ponto da diagonal foram traçados dois segmentos de reta paralelos aos lados de um retângulo. Compare as áreas dos retângulos hachurados na figura.



Olhando para os alunos poderíamos ter respostas tais como: não tem como resolver porque falta informação; o que o enunciado está "pedindo" realmente para fazer? Quanto vale cada lado do retângulo? Ou, a medida dos lados do triângulo? Lorenzato (1995), Bicudo (2005) e Leivas (2012) pontuam em suas pesquisas a falta de percepção de raciocínio geométrico para a resolução de algumas questões que não exigem números ou algoritmos. Mas como pensar nessas experimentações quando o que se torna mais forte em uma aula são as definições e conceitos de um objeto geométrico? Recorrer ao material concreto pode ser uma solução, segundo Andrade (2004) esse pode ter sido o incentivo para que a geometria voltasse ao currículo das aulas. Inicialmente sua utilização é importante para a visualização, mas concordamos com Pais (2000, p. 14) quando ao discutir a utilização de recursos didáticos destaca a existência de duas posturas:

> Uma consiste no entendimento de que os conceitos geométricos são entidades platônicas puramente racionais, pertencentes a um suposto mundo abstrato de ideias prontas, acabadas e acessíveis somente através do método axiomático em seu aspecto formal; a outra expressa-se pela visão de que o ensino da geometria pode ser reduzido ao nível de um conhecimento essencialmente sensitivo, trabalhado somente no aspecto experimental através da manipulação estrita de modelos materiais e desenhos.

Fica claro que para o autor o material didático tem uma contribuição significativa para o entendimento de alguns conceitos mas seu uso precisa ser consciente e limitado, deve proporcionar ao aluno a construção de conhecimentos "que precisam, muitas vezes, ser aplicados em situações que exigem abstração" (BITTAR; FREITAS, 2005, p. 29). Se faz necessário em dado momento a sua retirada, indo do concreto ao abstrato, é um caminho para se discutir e compreender os conceitos geométricos e aí passar a outro estágio - o das demonstrações.

Vamos a alguns exemplos:

A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

É importante que os alunos percebam a importância de se estudar o triângulo, pois além de ser o polígono mais simples, todos os demais podem ser decompostos em triângulos. Temos então o problema clássico: *"Qual o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer?".*

Como se trata de um resultado importante para o desenvolvimento da geometria, acreditamos que vale a pena trabalhar algumas atividades de investigação visando a descoberta e a produção de "prova" dessa propriedade. Neste sentido algumas das atividades preliminares que podem ser propostas são as seguintes:

1. Cada aluno (ou grupo) deve desenhar um triângulo qualquer numa folha, em seguida recortá-lo e colorir cada ângulo com uma cor diferente. Finalmente deve recortar os três ângulos e juntá-los em seus vértices observando o resultado.

2. Outro tipo de exploração consiste em pedir ao alunos para desenhar um triângulo qualquer numa folha e recortá-lo. Em seguida fixar o maior lado como base e dobrá-lo na altura do ponto médio dos outros dois lados (dobrando corretamente o vértice superior incide sobre a base do triângulo). Finalmente sobram-se os dois ângulos, de tal forma que os vértices coincidam no mesmo ponto, formando um retângulo parecido a um envelope.

3. Poder-se-ia ainda, pedir aos alunos para desenharem vários triângulos de tamanhos variados, utilizando-se de instrumentos de desenho geométrico. Em seguida pedir para efetuar as medidas de cada um dos ângulos internos e preencher os valores numa tabela, onde a sua soma deverá resultar em 180º.

No debate com os alunos é conveniente deixar claro que apesar das atividades desenvolvidas estarem "mostrando" que a soma dá sempre 180°, a certeza só pode ser obtida mediante uma demonstração matemática.

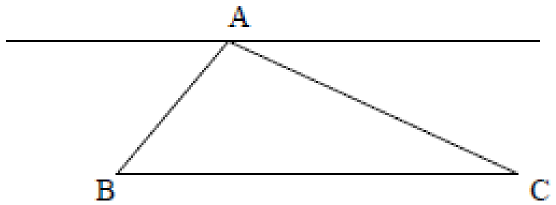
Para demonstrar esse teorema é necessário admitir como válida a proposição: "*Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes*".

Embora numa estruturação mais rigorosa esse resultado possa ser demonstrado para um nível introdutório podemos aceitá-lo sem demonstração. Podemos fazer constatações de sua validade através do deslocamento de esquadro ou desenhando os ângulos formados sobre uma folha transparente e deslizá-la em seguida para comprovar a congruência dos ângulos correspondentes.

Pode-se então demonstrar o teorema:

Num triângulo ABC qualquer, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ = 180°

A demonstração consiste em traçar uma reta r, passando pelo vértice A e paralela a $\overline{BC}$, como mostra a figura:



Temos então que:

x + $\hat{A}$ + y = 180°

Mas x = $\hat{B}$ e y = $\hat{C}$.

Portanto, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$ = 180°

A partir desse resultado, analisar se é conveniente apresentar aos alunos dos anos finais do ensino fundamental os corolários abaixo:

a) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60°.

b) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.

c) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

d) Um enunciado para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

e) Um enunciado para a soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados.

A atividade privilegia inicialmente a experimentação porque ao cortar, dobrar, manipular instrumentos de desenho o aluno chegará a um resultado plausível e até certo ponto, aceitável. O aluno, neste caso, não é limitado a um processo exaustivo de formalização e sim a descoberta de caminhos para a dedução e formalização de conceitos. “A abordagem problematizadora dos conteúdos da geometria com a utilização de atividades experimentais e argumentação dedutiva pode constituir-se em recurso valioso para seu ensino e aprendizagem” (WAPPLER; GRANDO, 2014,

p. 185). Essa abordagem possibilita ao aluno buscar justificativas e generalizações que podem ser fruto da experimentação ou da argumentação dedutiva, estabelecendo conexões entre ambos os procedimentos. Entretanto, como encontrar atividades assim, que possibilitem a discussão dos conceitos geométricos?

O livro didático, as demonstrações e as atividades

De modo geral as demonstrações não fazem parte das discussões feitas por professores em sala de aula (GARCIA OLIVEIRA, 2009). Inferimos que essas escolhas estejam pautadas na opção do professor, que prefere “aqueles com grande quantidade de exercícios que privilegiam a habilidade de cálculo, não oferecendo muita oportunidade para o aluno pensar de forma autônoma” (MARTINS; MANDARINO, 2014, p. 113). No livro didático é possível encontrar atividades com demonstrações, mas apresentar essas demonstrações de um modo que não possibilita os alunos refletir sobre esse complexo processo, pouco adianta (ORDEM, 2010). “É preciso destacar que a denominada demonstração final de um teorema é o culminar de um processo, a apresentação limpa e ordenada de uma larga investigação nunca isenta de intuição, provas, argumentos, justificações, erros, refinamentos, etc.” (ORDEM, 2010, p. 37). Para esse autor, precisamos ter atividades de cunho exploratório que permitam por meio de exploração de propriedades a formulação de conjecturas. Precisamos pensar em possibilidades para que isso aconteça.

Ou ainda Segundo Garcia Oliveira e Bittar (2015, p. 142) ao analisarem algumas coleções de livros didáticos, em relação a atividades envolvendo demonstrações em geometria, que estão presentes nos três últimos guias (2008/2011/2014) do PNLD, se depararam com

> uma discussão aparente de atividades, ou seja, poucas tentativas que são representadas por atividades às vezes sem qualquer ligação com o conteúdo ou o processo contrário, apresentar o conteúdo utilizando uma demonstração matemática, mas que não está sendo discutida nas atividades subsequentes. Das edições analisadas, tendo como referência os Guias do PNLD, pudemos constatar que atividades que levem à discussão, argumentação e possíveis demonstrações, são contempladas em uma única coleção. Ao longo das três últimas avaliações as mudanças neste campo não foram sentidas, o que sugere dificuldade com a implementação de atividades que o contemplem ou o que é proposto parece ser suficiente para os autores.

Neste sentido como trabalhar atividades que estão presentes nos livros didáticos ou em qualquer outro material de apoio do professor situações que contemplem o que é proposto pelo PNLD em relação as atividades de geometria? Pois para “(...) argumentar, tomar decisões e criticar; visualizar; utilizar a imaginação e a criatividade; conjecturar e provar; e expressar e registrar ideias e procedimentos” (BRASIL, 2010, p.28) se faz necessário que o professor tenha subsídios para realizar discussões que promovam essas atitudes.

Vejamos um exemplo desse tipo de atividade ao discutirmos o conteúdo matemático congruência de triângulos.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS.

Para a apresentação dos casos de congruência sugerimos a realização de atividades introdutórias de desenho geométrico (com régua, compasso e transferidor) de construção de triângulos.

ATIVIDADE

Construir dois triângulos que tenham:

a) Um só lado congruente.

b) Apenas dois lados congruentes.

c) Três lados congruentes.

d) Um só ângulo congruente.

e) Apenas dois ângulos congruentes.

f) Três ângulos congruentes.

g) Apenas um lado e um ângulo congruente.

h) Dois lados e um ângulo congruentes.

OBS. Em cada uma dessas construções, os resultados obtidos devem ser comparados aos dos demais. Deve-se observar que em alguns casos, como na atividade c, não é possível construir triângulos diferentes, ou seja, se dois triângulos têm os três lados congruentes então eles são congruentes, ou seja, basta que três lados sejam respectivamente congruentes para que os três ângulos também o sejam.

Pode-se então apresentar a definição:

“Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.” Ou seja: Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes e se

$$\begin{array}{ccc} A & \leftrightarrow & E \\ B & \leftrightarrow & F \\ C & \leftrightarrow & G \end{array}$$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações:

AB=EF BC = FG AC = EF

A = E B = C C = G

Após uma análise e discussão das respostas encontradas, deve-se responder a questão: quais são então os casos em que a solução é única, ou seja, quais são os casos de congruência?

Os três casos principais de congruência podem então ser enunciados como postulados, embora num tratamento mais formalizado se possa apresentar apenas um deles como postulado e demonstrar os outros dois, que passam então para a categoria de teoremas.

CASOS DE CONGRUÊNCIA

1° CASO: Dados triângulos ABC e EFG, tais AB = EF, BC = FG e AC = EG. Então ABC é congruente a EFG (caso LLL).

2° CASO Dados dois triângulos ABC e EFG se AB = EF, AC = EG e A = E Então ABC é congruente a EFG (caso LAL).

3° CASO Dados dois triângulos ABC e EFG se AB = EF, A = E e B = F, Então ABC é congruente a EFG (caso ALA).

Admitindo esses três casos de congruência, é possível demonstrar muitas propriedades importantes da geometria euclidiana plana.

ATIVIDADE DEDUTIVA

Baseando-se nos casos de congruência acima, mostre a validade das seguintes proposições:

a) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

b) As diagonais de um retângulo são congruentes.

c) Um ponto é equidistante das extremidades de um segmento se e somente se ele pertence à mediatriz.

d) Todo quadrilátero cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo.

e) Todo quadrilátero cujas diagonais se cortam ao meio é um paralelogramo.

f) Em todo paralelogramo os ângulos opostos são congruentes.

g) Se um quadrilátero tem os lados opostos paralelos e congruentes então o quadrilátero é um paralelogramo.

h) O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade do seu comprimento.

i) Um ponto pertence à bissetriz de um ângulo se e somente se equidista dos lados.

j) Em todo triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

Retirado de notas de aula prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas: O ensino de geometria euclidiana na educação básica, 2017.

Essa atividade propõe ao aluno possibilidades de experimentações iniciais, investigação para conjecturar possibilidades e oportunidades de formalização do resultado, além de proporcionar novas discussões a partir do conhecimento adquirido e estabilizado. Voltamos a pensar na construção histórica da geometria. Empirismo dando lugar à demonstração.

Considerações finais

Neste texto buscamos retomar um pouco da história e por meio dela sustentar a ideia de que o ensino de geometria nas salas do ensino fundamental pode seguir o mesmo caminho, experimentando, experimentando e sistematizando a partir das próprias ideias expressas pelos alunos em atividades que despertem e tenham algum significado para eles. Às vezes fica difícil entender tal dificuldade na exploração de um conteúdo matemático que está tão presente no nosso dia a dia. Inferimos que talvez essa seja uma causa da sua não compreensão – considerar que os conceitos do campo geométrico sejam tão claros que não necessitem de explicações, pois estão em todos os lugares e são facilmente ilustráveis. Ao acompanharmos as dificuldades históricas de se trabalhar com a geometria talvez encontremos os problemas para o seu “abandono” ou alternativas para o seu não abandono, sendo essa última a intenção desse artigo.

Referências bibliográficas

ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. **Tendências Didático- Pedagógicas No Ensino De Geometria:** um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. Educação Matemática em Revista. Recife, nº17, ano 11, p.61-69, dez/2004

BALACHEFF, N. **Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics**. In: PIMM, D.(Ed.). Mathematics, teachers and children. pp. 216-235, Hodder & Stoughton, Londres, Inglaterra, 1988.

BICUDO, I. **Peri apodeixeos/de demonstration** In: Educação Matemática pesquisa em movimento. BICUDO, M. A. V., BORBA, M. C.(orgs.). 2 ed. São Paulo: Cortez, 2005, pp 58-76.

BITTAR, M. e FREITAS, J. L. M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**, 2ª edição. Campo Grande: Editora da UFMS, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Guia de livros didáticos PNLD 2011: Matemática, Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2010.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasília: MEC/SEF, 1998.

GARCIA OLIVEIRA, S. **Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis do triângulo**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, UFMS. Campo Grande, 2009.

GARCIA OLIVEIRA, S. e BITTAR, M. **As construções geométricas e demonstrações nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental.** VIDYA, v. 35, n. 2, p. 129-145, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

LEIVAS, J. C. P. **Educação Geométrica:** Reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria. EMR-RS, v.1, n. 13, p. 9-16, 2012.

LORENZATO, A. **Por que não ensinar geometria?** A Educação Matemática em Revista, ano III, n. 4, Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1995.

MARTINS, R. B., MANDARINO, M. C. F. **Argumentação, prova e demonstração em geometria**: análise de edições de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. Boletim Gepem. n. 62. jan./jul. 2013, p. 101-115.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria:** uma busca da organização matemática e didática em livros didáticos de 6° a 8° séries de Moçambique. 141 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

PAIS, L. C. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. www.anped.org.br/23/textos/1919t.pdf. 23° Reunião, Caxambu, 2000, acesso em 15 de maio de 2017.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil:** causas e consequências. Zetetiké. Campinas, v. 1, n. 1, mar. 1993.

WAPLER, F. P.; GRANDO, M. C. **Experimentação em geometria:** Teorema de Pitágoras. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 2014.