



## CRIOGRAFIA E MATRIZES: UMA ATIVIDADE DIRECIONADA AO ENSINO DE MATEMÁTICA

**William Debon Pereira**<sup>1</sup>

**Andressa Escobar Machado**<sup>2</sup>

**Roger Braga Dutra**<sup>3</sup>

**Celiane Costa Machado**<sup>4</sup>

Órgão financiador: CAPES

### Educação Matemática no Ensino Médio

#### Resumo:

Este artigo relata o planejamento de uma atividade que aborda o uso da criptografia em sala de aula. Essa atividade faz parte dos trabalhos desenvolvidos no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), subprojeto Matemática da Universidade Federal do Rio Grande - FURG. O objetivo é propor ações que incentivem os estudantes a aprender Matemática por meio da pesquisa, integrando essas aprendizagens com o cotidiano. Utilizamos a pesquisa como base para elaboração da proposta, pois entendemos que ao pesquisar, os estudantes constroem seus conhecimentos, além de se tornarem mais autônomos e críticos. A atividade apresentada é direcionada ao Ensino Médio, tem como base o tema criptografia relacionada com matrizes e suas operações. Destacamos a importância da pesquisa também durante o planejamento e organização da prática educativa, uma vez que o professor ao pesquisar está se atualizando e reconstruindo seus conhecimentos, o que vai refletir nas aprendizagens de seus alunos.

**Palavras Chaves:** Matrizes. Criptografia. Educação.

#### Introdução

O presente trabalho tem por objetivo relatar o planejamento de uma atividade, organizada por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática, que faz parte das ações do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), subprojeto Matemática, vinculado a Universidade Federal do Rio Grande – FURG. A intenção é desenvolver ações que incentivem os estudantes a aprender Matemática por meio da pesquisa, promovendo atividades que possibilitem uma integração desse aprendizado com o cotidiano dos estudantes. Destacamos que a prática educativa apresentada neste artigo é direcionada ao Ensino Médio.

---

<sup>1</sup> Aluno da graduação em Matemática-licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande – FURG. <[williamdebom123@hotmail.com](mailto:williamdebom123@hotmail.com)>.

<sup>2</sup> Aluna da graduação em Matemática-licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande – FURG. <[andressa.aem@gmail.com](mailto:andressa.aem@gmail.com)>.

<sup>3</sup> Aluno da graduação em Matemática-licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande – FURG. <[rogerbragamk@outlook.com](mailto:rogerbragamk@outlook.com)>.

<sup>4</sup> Professora Doutora da Universidade Federal do Rio Grande – FURG. <[celianemachado@furg.br](mailto:celianemachado@furg.br)>.

Observamos que nos dias atuais é desafiador ensinar Matemática. Existe um distanciamento entre os interesses dos estudantes e as práticas educativas propostas em sala de aula. Assim, com o intuito de propor um espaço de aprendizagem, que desperte a curiosidade e o envolvimento dos estudantes, procuramos por meio de pesquisas, ampliar nossos conhecimentos sobre as tendências mais utilizadas no ensino de Matemática, como por exemplo, jogos, tecnologias digitais, resolução de problemas, modelagem matemática, entre outras.

A partir dos diálogos estabelecidos sobre o material pesquisado, elaboramos juntamente com o professor supervisor (professor da rede pública que atua no PIBID) e professor coordenador do subprojeto Matemática, uma prática educativa abordando o conteúdo de matrizes por meio da criptografia. Na sequência, apresentamos um detalhamento dessa prática que tem como propósito despertar o interesse dos estudantes em reelaborar seus saberes.

### **Contextualizando a prática educativa**

As pesquisas relacionadas sobre as tendências de ensino de Matemática se constituíram como ponto de partida para nossas discussões e problematizações de práticas educativas. Nesse momento, vivenciamos a experiência da pesquisa como “instrumento principal do processo educativo” (DEMO, 2011, p.2). Ao nos colocarmos como pesquisadores no PIBID, repensamos nossas ações educativas como forma de atitudes dentro da escola. Dessa forma, entendemos “(...) que pesquisa é essencial para o docente e o discente. Ser professor não é dar aula, mas cuidar que o aluno aprenda, bem como ser aluno não é escutar aula, mas reconstruir conhecimento, formar-se, tornar-se cidadão” (DEMO, 2009, p. 17). Além disso, o atual momento que vivemos, em que a tecnologia digital e a internet estão fortemente presentes, favorece a prática da pesquisa, uma vez que as informações se tornaram de fácil acesso.

A ideia de trabalhar com o conteúdo de matrizes surgiu da demanda apontada pelo professor supervisor. Assim, realizamos estudos sobre matrizes e destacamos algumas relações desse tema com tabelas, programação de computadores e interpretação de gráficos. Elaboramos o planejamento das atividades com base nas pesquisas realizadas. A opção adotada foi à utilização da criptografia. Entendemos que a criptografia pode auxiliar em elaborações de práticas educativas instigando os estudantes a relacionar o conteúdo com problemas práticos. A palavra criptografia vem do “[...] grego, cryptos significa secreto,

oculto. A criptografia estuda os métodos para codificar uma mensagem de modo que só seu destinatário legítimo consiga interpretá-la. É a arte dos ‘códigos secretos’”(COUTINHO, 2010, p. 4).

Ainda nos estudos sobre aplicações de matrizes em diversos contextos, encontramos o artigo “Criptografia e os conteúdos matemáticos do Ensino Médio” de Clarissa de Assis Olgin (OLGIN, 2011), publicado na XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM. Tal proposta nos instigou a desenvolver uma prática educativa que consideramos motivadora, pela relação de utilização do conteúdo matemático com aplicações. Na sequência descrevemos a proposta descrita a partir de 5 momentos.

#### Primeiro momento

Solicitar aos alunos que escrevam em uma folha de papel o que eles pensam/entendem/acham sobre o tema criptografia. Logo em seguida, essas informações serão coletadas e guardadas em uma caixinha de madeira ou papelão para serem utilizadas num próximo momento. Tais informações serão recolhidas pelo professor afim de que não sejam feitas reescritas sobre as mesmas, uma vez que a intenção é problematizá-las na sequência da aula.

#### Segundo momento

Solicitar os estudantes a realização de uma pesquisa sobre matrizes e criptografia dando ênfase as suas aplicações. Também deve ser solicitado que a pesquisa aborde as possíveis conexões entre os dois temas. Os meios de busca das informações podem ser livros, jornais, revistas, internet, entre outros. Essa atividade pode ser realizada em sala de aula, caso a escola disponha do material para a pesquisa ou ser solicitada para fazer extraclasse.

#### Terceiro momento

Com base no material reunido pelos estudantes, criar um espaço para discussão dos resultados encontrados. Nesse momento os estudantes devem ser incentivados a falar sobre suas descobertas. Além disso, trazer para a discussão a importância da criptografia em ocultar mensagens, as quais apenas são decifradas com o conhecimento de código secreto. Fazer questionamentos do tipo: O que é criptografia? Qual o propósito dessa técnica de ocultar textos? Onde foi e/ou é aplicada a criptografia? Como podemos criar mensagens no qual apenas o emissor e o receptor consigam realizar a sua leitura? Quais mecanismos eram/são

utilizados para criptografar mensagens? Você utiliza algum aplicativo que utiliza desse recurso criptográfico?

A partir do diálogo realizado, solicitar aos estudantes que estruturarem um breve texto registrando os principais entendimentos emergentes da discussão, trazendo novos questionamentos, se for o caso. Além disso, nesse momento o professor pode organizar uma dinâmica com os estudantes, convidando-os a sentar em uma roda para que a caixa de madeira ou papelão com as informações registradas pelos estudantes sobre criptografia, coletada no primeiro momento da atividade, seja passada de aluno por aluno enquanto uma música de fundo toca. Ao parar de tocar a música, o aluno que possuir a caixa nesse momento terá que retirar um papel e ler para os demais colegas a informação registrada. Assim, o docente pode questionar se os demais estudantes concordam com o que foi escrito ou não, já que nesse momento todos os alunos já realizaram um estudo prévio do tema.

#### Quarto momento

Com base nos estudos de Olgin (2011) estruturamos um exemplo do processo de codificação e decodificação de mensagens. Propomos apresentar um sistema de códigos, conforme a Figura 1, onde cada número corresponde a uma letra do alfabeto ou a um símbolo.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	#	_
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Figura 1: Sistema de códigos

Logo em seguida propor uma frase a qual será ocultada. Por exemplo: **#Aprender\_Matemática**. A escolha da frase se constituiu pelo atual contexto em que estamos inseridos e pelo motivo educacional, que é aprender Matemática. Em seguida fazer a associação entre as letras e as respectivas numerações, com base na tabela de códigos apresentada na Figura 1, de onde resulta a Figura 2, que contém a sequência numérica associada à mensagem.

#	A	p	r	e	n	d	e	r	_	M	a	t	e	m	á	t	i	c	a
27	1	16	18	5	14	4	5	18	28	13	1	20	5	13	1	20	9	3	1

Figura 2: Sequência numérica.

A seguir, montar a matriz  $M$  com a sequência numérica associada à mensagem. Tomamos como exemplo a matriz  $M$  na seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 27 & 1 & 16 & 18 & 5 & 14 & 4 & 5 & 18 & 28 \\ 13 & 1 & 20 & 5 & 13 & 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida vamos escolher uma matriz  $A$  que seja inversível, ou seja, que admita a matriz inversa (STEINBRUCH, 1987) de modo que seja possível realizar o produto  $AM$ . Nesse caso o número de colunas da matriz  $A$  deve ser o mesmo número de linhas da matriz  $M$ . A matriz  $A$  é denominada matriz chave. Sugerimos trabalhar com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

cuja inversa é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

É interessante que os estudantes já tenham estudado o conceito de matriz inversa. Caso esse conceito não tenha sido trabalhado, sugerimos fazer uma abordagem resumida nesse momento do referido tema.

Calculando a matriz  $AM$  obtemos a mensagem codificada, ou seja,

$$AM = A \cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 27 & 1 & 16 & 18 & 5 & 14 & 4 & 5 & 18 & 28 \\ 13 & 1 & 20 & 5 & 13 & 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AM = \begin{bmatrix} 146 & 8 & 148 & 79 & 80 & 47 & 112 & 60 & 69 & 89 \\ 199 & 11 & 204 & 107 & 111 & 63 & 156 & 83 & 93 & 119 \end{bmatrix}$$

Para voltar à mensagem original devemos realizar o processo de decodificação. Para tanto consideramos que  $M = A^{-1}AM$ , ou seja,

$$M = A^{-1}AM = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 146 & 8 & 148 & 79 & 80 & 47 & 112 & 60 & 69 & 89 \\ 199 & 11 & 204 & 107 & 111 & 63 & 156 & 83 & 93 & 119 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 27 & 1 & 16 & 18 & 5 & 14 & 4 & 5 & 18 & 28 \\ 13 & 1 & 20 & 5 & 13 & 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, utilizando o sistema de códigos proposto na Figura 1, obtemos a mensagem original “#Aprender\_Matemática”. Depois dessa construção pode ser proposto mudar a matriz chave  $A$ . Tal mudança provocará uma alteração na matriz associada à mensagem codificada, ou seja, obteremos uma nova matriz  $AM$ . Outro fato relevante a destacar é que a matriz  $M$  pode ser considerada com um maior número de linhas, porém esse fato tem influência direta nas dimensões da matriz chave  $A$ .

Na sequência, solicitar aos alunos escolher/criar uma frase e fazer sua codificação. A matriz chave pode ser a matriz  $A$  proposta anteriormente, ou também pode ser criada uma nova matriz chave, desde que atenda as condições previamente mencionadas.

Outra tarefa possível de ser realizada é apresentar uma mensagem codificada, com base no mesmo sistema de códigos, juntamente de uma matriz chave associada e solicitar aos alunos fazer a decodificação para assim decifrar a mensagem. Pode ser usado como exemplo, as mensagens codificadas pelos próprios estudantes no exercício anterior. É interessante incentivar que cada estudante troque a mensagem codificada com um colega para que todos na turma possam decifrar frases diferentes da sua.

#### Quinto momento

Propor uma roda de conversa com os estudantes para saber o que eles acharam dessa atividade com criptografia e pedir sugestões para aprimorá-la. Levantar questões como: O que vocês mais gostaram da atividade? Que sugestões vocês têm para melhorar a atividade? Que outros temas abordar para a realização de uma nova atividade? Além disso, requisitar aos alunos que produzam um texto sobre a experiência de participar dessa atividade.

A participação dos estudantes em sala de aula, por meio do diálogo, permite a troca de experiências tornando-os construtores de seus próprios saberes. Além disso, ao escutar o aluno, o professor dá a oportunidade de cada discente organizar suas ideias e de opinar sobre temas que despertem curiosidade, entusiasmo e vontade de aprender.

## Resultados

A elaboração dessa atividade proporcionou a experiência de planejar uma aula dinâmica, cujo objetivo central é à aprendizagem dos alunos. A partir da pesquisa, nós

professores, aperfeiçoamos nossa capacidade de inovar em sala de aula, buscando temas atuais, que tenham relação com o cotidiano dos estudantes.

Além disso, ressaltamos a importância em ter um plano de aula organizado por etapas e procedimentos, evidenciando os objetivos propostos. O planejamento necessita levar em consideração o cotidiano dos estudantes envolvidos a fim de promover uma maior participação em aula, visto que a forma como os conceitos são trabalhados é determinante para despertar o interesse dos mesmos.

Ao planejar devemos ter como ponto de partida questionamentos como: O que desejo que meu aluno aprenda? Porque aprender? Qual o sentido dessa aprendizagem? Quais conteúdos quero desenvolver em sala de aula? Que objetivos quero alcançar? Acreditamos que a pesquisa nos ajuda a responder algumas dessas inquietações, além de nos auxiliar na construção do planejamento como um todo.

Outro ponto a destacar está relacionado com os recursos necessários para a execução da prática, uma vez que se estes não estão disponíveis na escola no momento da aula, os resultados da atividade ficarão comprometidos. De modo semelhante, uma eventual falha na conexão com a internet inviabiliza a realização de uma pesquisa em sites ou repositórios. Para isso se faz necessário o professor ter um planejamento alternativo, a ser desenvolvido, em caso de algum contratempo.

A experiência em organizar a prática educativa discutida nesse artigo nos fez dedicar tempo pensando no aluno, se eles vão aprender o conteúdo de forma descontraída e atrativa fazendo da sala de aula um local em que os estudantes percebam o significado daquilo que estão estudando, estabeleçam relações e produzam novos conhecimentos. A base desse planejamento é constituída pela pesquisa, na qual o professor coloca-se no papel de pesquisador para procurar novos modelos de intervir na aula, fazendo correlações e mediando as aprendizagens imersas naquele ambiente.

## **Conclusões**

A maneira como a atividade foi estruturada permite ao professor verificar se a turma compreendeu o conceito de matriz inversa, assim como a forma de encontrá-la. No caso desse conceito ainda não ser conhecido pelos alunos, este planejamento também pode servir para o professor introduzir o tema, e assim, despertar neles o interesse pelo aprendizado. Portanto, trata-se de uma maneira diferenciada de ensinar Matrizes, principalmente, pelo fato dos

alunos aprenderem sua aplicação na vida cotidiana, não se restringindo a forma tradicional, igualmente, encontrada na maioria dos livros didáticos.

Além disso, a partir da discussão proposta no terceiro momento da prática educativa, o professor poderá averiguar se os alunos compreenderam o que é criptografia e quais informações emergiram do processo de pesquisa realizado. Por isso, ressaltamos a importância das etapas do planejamento, uma vez que os conhecimentos de criptografia são necessários para realizar a decodificação de mensagens no momento seguinte.

A atividade propicia, ainda, a possibilidade de despertar a motivação dos alunos para que socializem e expressem suas ideias e descobertas, tanto na forma oral quanto na linguagem escrita, por meio de discussões no grande grupo e registros individuais. O professor poderá também, explorar o aspecto coletivo da turma ao solicitar que cada aluno realize a troca de uma mensagem codificada com um colega e, assim, incentivar o bom relacionamento entre eles.

Ensinar matemática, portanto, é se reinventar buscando relação do real com o conceitual, fazendo com que os estudantes tenham uma formação sólida e de qualidade. Para tanto, entendemos que uma forma é propor práticas educativas baseadas num planejamento claro e objetivo com todas as etapas procedimentais que irão apoiar novas discussões dentro de sala de aula. Além disso, instigar os estudantes a pesquisarem sobre um determinado tema faz com que eles tenham autonomia na construção de seus próprios saberes.

## **Referências**

COUTINHO, S. Criptografia. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2015.

DEMO, P. Educação Hoje: “novas” tecnologias, pressões e oportunidades. 1 ed. São Paulo, SP: Atlas, 2009.

DEMO, P. Educar pela pesquisa. 9 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2011.

OLGIN, C. A. Criptografia e os conteúdos matemáticos do Ensino Médio. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. Anais eletrônicos, Recife. Universidade Federal de Pernambuco, 2011. Disponível em: <[www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2092.pdf](http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/artigos/2092.pdf)> Acesso em: 21 de nov. 2016.

STEINBRUCH, A. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo, SP: McGraw-Hill. 1987.