



UM ESTUDO SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DE ROTAÇÃO EM FORMAÇÃO CONTINUADA

Sabrine Costa Oliveira¹

Sandra Aparecida Fraga da Silva²

Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: O presente texto é um recorte de uma pesquisa de mestrado que analisou indícios da (re)construção do pensamento geométrico e de práticas docentes de professores que participaram de formação sobre transformações geométricas. Trazemos, portanto, algumas atividades desenvolvidas durante a pesquisa com o objetivo de evidenciar o processo formativo do pensamento geométrico sobre rotação. A pesquisa foi realizada com dez professores inscritos no curso de formação continuada semipresencial realizado em 2015 com carga horária de 80 horas. Em alguns encontros trabalhamos atividades envolvendo rotações e notamos que os professores tinham alguns indícios das propriedades das rotações, mas não conheciam todos os seus elementos, por exemplo, não identificavam a importância do ponto centro da rotação e que se mudássemos esse ponto mudamos a rotação, ou o ângulo de rotação ou diferentes possibilidades de uso desse ângulo. Em síntese, os professores (re)construíram seus conhecimentos em relação a rotação por meio da discussão de atividades investigativas sobre transformações geométricas e em práticas docentes incentivadas pelo curso.

Palavras Chaves: Formação de Professores. Transformações Geométricas. Transformação de Rotação. Geometria.

Introdução

Nos últimos anos, a geometria esteve presente no centro de discussões sobre o ensino de matemática. A maioria dos estudos (CATUNDA et al., 1988; PAVANELLO, 1993; FRAGA, 2004; FAINGUELERNT et al., 2012; VELOSO, 2012) afirmam que a geometria não é abordada de forma adequada no ensino básico apesar da ampliação nas pesquisas sobre o assunto.

As causas apontadas para a ausência da geometria nas escolas têm origem no Movimento da Matemática Moderna, no Brasil na década de 1970, período em que o ensino da álgebra foi privilegiado e o ensino de geometria foi praticamente banido do sistema escolar. Esse movimento, que tinha como proposta renovar o ensino de matemática, enfatizava o trabalho com a geometria por meio do grupo das transformações isométricas (simetrias, translações, rotações) e noções de figura

¹ Mestre em Educação em Ciências e Matemática (IFES). Secretaria de Estado da Educação - Espírito Santo (SEDU/ES). binecosta@gmail.com

² Doutora em Educação (Ufes). Instituto Federal do Espírito Santo (IFES). sandrafraga7@gmail.com

geométrica e de intersecção de figuras como conjuntos de pontos do plano, representadas na linguagem da teoria dos conjuntos. Assim, como os professores não sabiam trabalhar nesta abordagem, a geometria foi desaparecendo da sala de aula da educação básica e, conseqüentemente, a geração de alunos, hoje atuais professores de matemática, tiveram pouco ou nenhum contato com a geometria elementar. Por esse motivo, os professores sentem-se inseguros para trabalhar a geometria em aulas de matemática, associando-a a um nível de ensino mais rigoroso ou considerando-a de pouca importância no desenvolvimento de competências matemáticas, assim a geometria ainda continua distante da sala de aula (GRANDO, NACARATO, GONÇALVES, 2008).

Defendemos um processo formativo do professor de matemática que possa contribuir para a construção de diferentes conceitos. Iniciamos com a definição de alguns conteúdos geométricos para serem estudados e escolhemos as transformações geométricas no plano, não por influência do MMM, mas pela importância deste conteúdo para compreender noções de movimento de figuras, tão presente na vida cotidiana. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) o ensino de transformações geométricas são fontes ricas para o desenvolvimento de atividades investigativas em sala de aula, além de favorecer o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial, pode auxiliar a construção da noção de congruência de figuras planas. Veloso (2000) afirma que:

É essencial retomar a intenção de dar às transformações geométricas o seu papel importante no ensino da geometria, num tratamento que tenha por ponto de partida e desenvolva as intuições que os alunos já possuem e prossiga numa via lenta de formalização ao longo de toda a escolaridade (VELOSO, 2000, p.67).

Esses diferentes tratamentos podem ser desenvolvidos a partir de atividades investigativas, que são propícias para o ensino de geometria. Essa visão coaduna com Fainguelernt *et al.* (2012, p.114) quando afirmam que:

A geometria, talvez mais do que qualquer outro campo da matemática, é uma área propícia para um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas. Nessa área há um imenso espaço para escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa.

Diante disso, ofertamos um curso de formação que viabilizou discussões e reflexões a respeito do conteúdo de transformações geométricas, com o uso de materiais manipulativos e atividades investigativas, e contribuiu para a

(re)construção de conhecimento pelos professores participantes sobre esse conteúdo de forma mais investigativa e espontânea.

Nesse contexto, o presente artigo traz um recorte desta pesquisa mais ampla e tem como objetivo analisar experiências vivenciadas durante o curso de formação, evidenciando indícios de construção do pensamento geométrico sobre rotação. Para isso, apresentamos parte da discussão do grupo de professores no encontro presencial e no ambiente virtual e respostas em questionários e atividades desenvolvidas durante o curso.

Transformações Geométricas de Rotação

Para discutir no curso de formação o ensino de transformações geométricas foi necessário aprofundar nosso conhecimento teórico sobre este conteúdo. O estudo teve como foco às transformações geométricas no plano euclidiano e está baseado em investigações desenvolvidas em Veloso (2000; 2012) ao utilizar o conceito de funções e grupos, e, em Bairral (2010), em uma visão mais intuitiva.

Para Veloso (2012), a função transformações geométricas é uma correspondência biunívoca do conjunto de pontos do plano (ou de todos os pontos do espaço) sobre si próprio, isto é, transformação geométrica é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas no mesmo plano ou em planos diferentes. De modo que, de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual (congruente) ou semelhante à primeira. Segundo ele, em uma transformação geométrica **T** verifica-se as seguintes condições:

- a) a cada ponto P de \mathbb{R}^2 **T** faz corresponder um, e somente um ponto P' de \mathbb{R}^2 .
- b) Se P e Q são dois pontos distintos, então, suas imagens P' e Q' são também distintas.
- c) Para qualquer ponto V de \mathbb{R}^2 , sempre existe um ponto V' em \mathbb{R}^2 , tal que V' é a imagem de V pela transformação geométrica **T**.

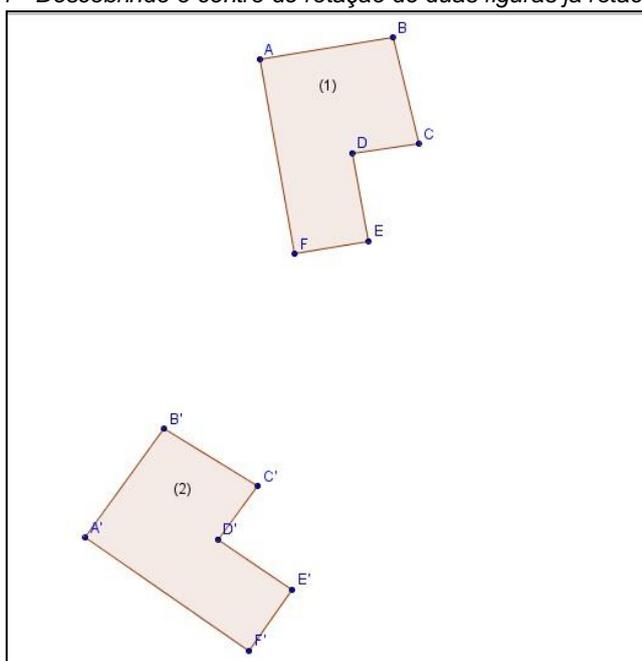
Transformações geométricas são isometrias quando para quaisquer dois pontos P e Q , temos que *distância* (P' , Q') = *distância* (P , Q). Essas transformações modificam apenas a posição da figura original. A palavra isometria origina-se do grego e significa igualdade de medida (*iso* – designativo de igualdade comparando-se dois a dois; *metria* – medida). As isometrias preservam as seguintes propriedades geométricas:

- ✓ *Colinearidade de pontos;*
- ✓ *Amplitude de ângulos;*

- ✓ *Paralelismos e perpendicularidade entre retas;*
- ✓ *Medidas de segmentos de retas;*

Bairral (2010) define rotação como um giro de uma forma em torno de um ponto, chamado centro de rotação. A amplitude do giro se mantém constante e essa amplitude denomina-se ângulo de rotação. Uma discussão pouco comum sobre rotação é, com base em duas figuras já rotacionadas, como determinar o centro da rotação, conforme a figura 1.

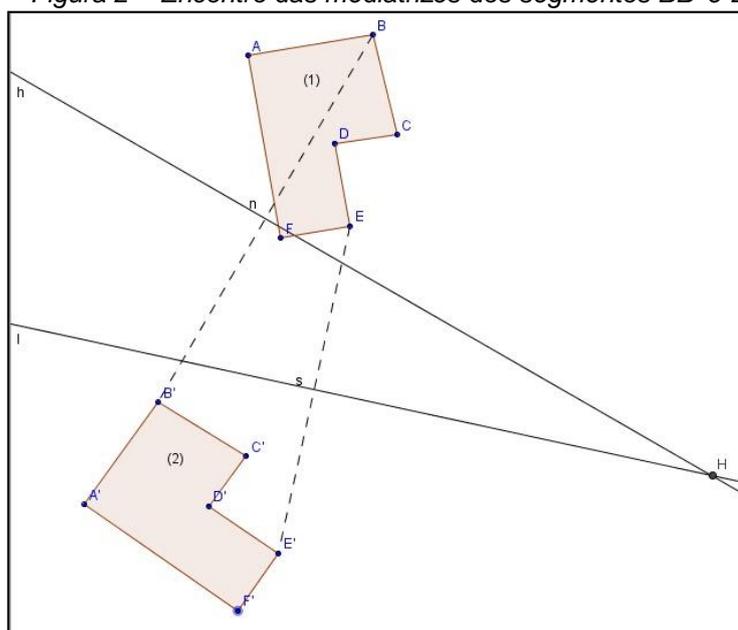
Figura 1 - Descobrimo o centro de rotação de duas figuras já rotacionadas.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 2016.

O hexágono (2) foi obtido por meio de uma rotação do hexágono (1). Para descobrir o centro da rotação, precisamos encontrar um ponto equidistante de cada ponto e de sua imagem rotacionada, isto para todos os pontos da figura. Basta então traçar a mediatriz dos segmentos que unem os pontos correspondentes, pois a mediatriz é um lugar geométrico do plano equidistante de todos os pontos aos extremos dos segmentos. Por exemplo, a figura 2 mostra o encontro das mediatrizes dos segmentos BB' e EE' , que será nosso ponto de rotação.

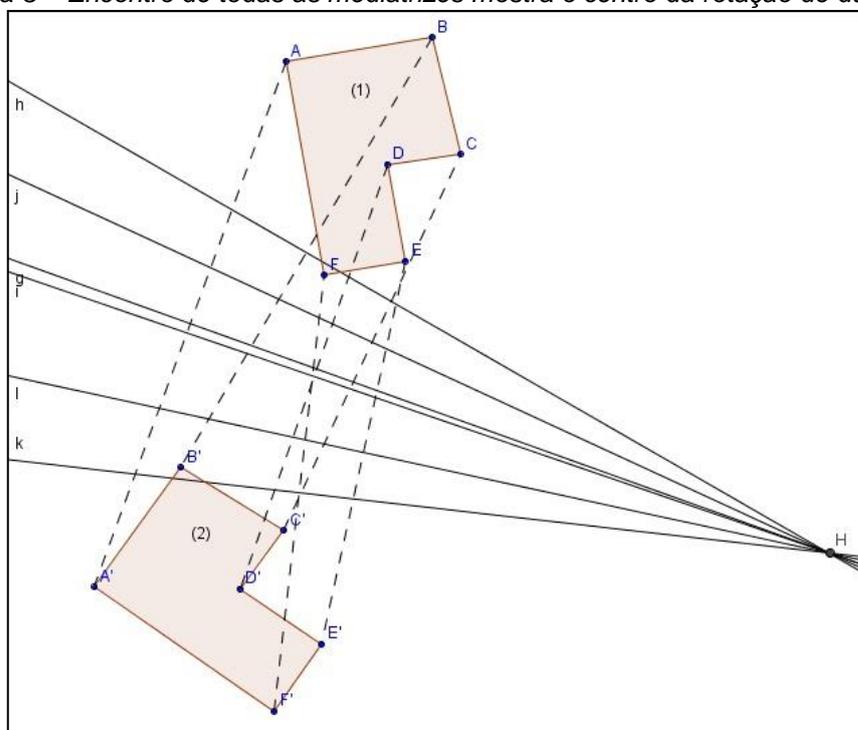
Figura 2 – Encontro das mediatrizes dos segmentos BB' e EE' .



Fonte: Acervo da pesquisadora, 2016.

Na sequência, se traçarmos todas as mediatrizes (AA' , BB' , CC' , DD' , EE' , FF') observamos que elas se encontram no ponto H, conforme mostrado na figura 8. Logo, H é o centro de rotação dos hexágonos.

Figura 3 – Encontro de todas as mediatrizes mostra o centro da rotação de duas figuras.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 2016.

No exemplo dado, utilizamos o GeoGebra para realizar a construção de todas as mediatrizes dos segmentos dos pontos correspondentes, numa atividade impressa, podemos traçar apenas duas mediatrizes com régua e compasso que já

encontramos o ponto de rotação. A construção de todas é importante apenas para que possamos visualizar que todas as mediatrizes se encontram num único ponto que será o centro de rotação.

Cabe destacar ainda que a utilização de representar uma figura e uma rotação da mesma, principalmente a um ângulo de 90° é comum entre atividades, porém, sem pensar em centro de rotação, sentido horário e anti-horário e diferentes ângulos de rotação. Por isso, a importância de formalizar conceitos de rotação com todas suas propriedades em cursos de formação de professores.

Procedimentos Metodológicos

O curso de formação teve como objetivo discutir conceitos e atividades investigativas sobre transformações geométricas com o uso de materiais manipulativos. O curso foi organizado em encontros presenciais quinzenais e atividades não presenciais, desenvolvidas via ambiente virtual. O curso foi realizado no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) de um instituto federal, por ser um local apropriado para se explorar materiais manipulativos por meio da investigação matemática. Participaram do curso 10 professores de matemática atuantes no ensino fundamental entre os meses de setembro a dezembro de 2015 em encontros quinzenais presenciais e atividades à distância. Os professores foram selecionados a partir de um edital público divulgado na página da instituição.

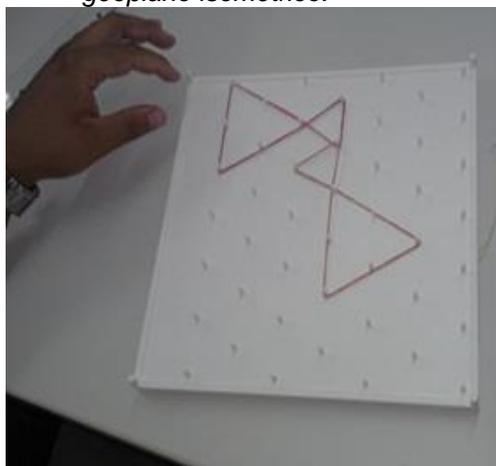
Durante o curso, utilizamos a observação e manipulação de materiais não comumente utilizados como: barras e gráficos de bordados em ponto cruz, moldes vazados e malha quadriculada. Também utilizamos o geoplano quadrado e isométrico no desenvolvimento das atividades propostas. Desses materiais, segundo Vale (2002) o geoplano e a malha quadriculada são materiais educacionais, planejados para este fim, e as barras e gráficos de bordados em ponto cruz e os moldes vazados são materiais comuns, porque não foram produzidos para fins educacionais, mas podem ser trabalhados com este enfoque. Trazer essa proposta para um curso de formação com professores é importante, primeiro, para divulgar esses materiais, visto que muitos professores afirmam que não utilizam materiais manipulativos por falta de conhecimento (KALEFF, 2008) e, segundo, porque além de conhecê-lo é necessário visualizar maneiras de abordar o material em sala de aula.

Para ilustrar a dinâmica do curso, será apresentada, na sequência, parte da discussão do grupo de professores no encontro presencial e no ambiente virtual e respostas em questionários e atividades envolvendo a rotação. Evidenciamos que não são ações desenvolvidas num único momento, mas em diferentes situações que colaboraram para discussões sobre este tipo de isometria.

Discussões sobre rotação

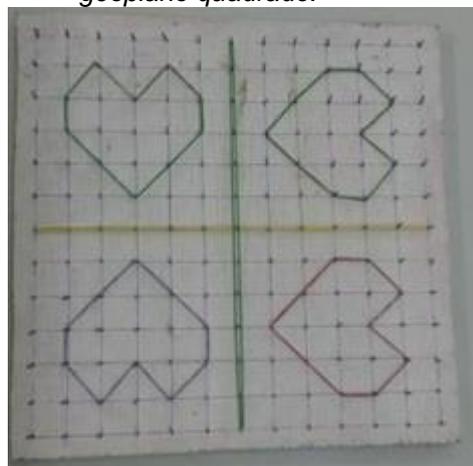
Durante as discussões no segundo encontro presencial, em que manipulávamos o geoplano quadrado e isométrico³, muitos professores ao serem solicitados que construíssem uma figura por meio da rotação, a realizavam sem se preocupar com o centro de rotação e com a ideia do ângulo e sentido de rotação (fig. 4 e 5). Ou seja, nas atividades concluídas eles identificavam que a transformação geométrica era a rotação, porém davam respostas imprecisas sobre as propriedades da mesma (centro e ângulo de rotação).

Figura 4 – Construções de Rotações no geoplano isométrico.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2015.

Figura 5 – Construções de rotações no geoplano quadrado.



Fonte: Acervo da pesquisa, 2015.

Na imagem 5 a professora Amanda⁴ representa a ideia de eixo cartesiano para realizar a rotação, mas quando questionada sobre o centro de rotação, ela indica a origem do 'eixo cartesiano'. Esta resposta mostra que a professora, apesar de compreender que na transformação de rotação a imagem precisa ser invertida de

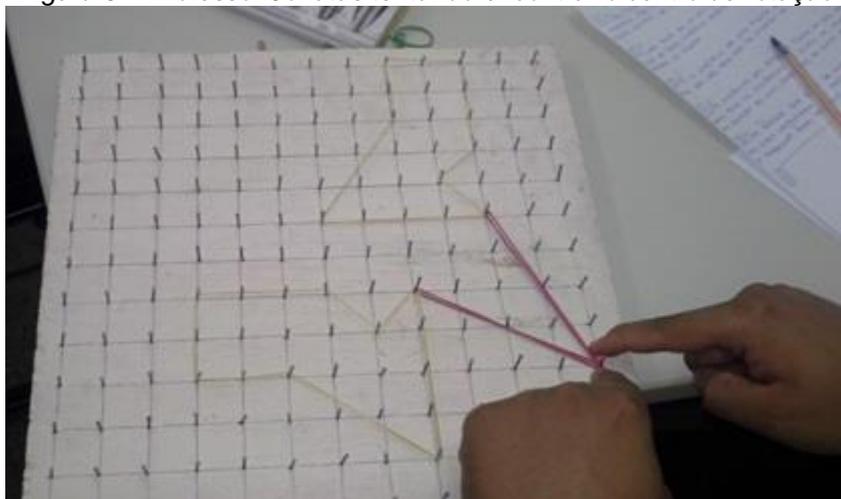
³ No geoplano quadrado, os pregos estão dispostos em linhas e colunas equidistantes, formando uma malha quadriculada. No geoplano isométrico, os pregos são equidistantes de todos os outros adjacentes a ele.

⁴ Os nomes utilizados neste texto são fictícios.

lado, não tem a preocupação de pensar em outras propriedades. A partir dessa atividade inicial notamos que os professores possuem uma visão intuitiva do assunto, conforme Veloso (2000) destaca. Cabe a nós, formadores oferecer algumas outras ações para que os professores avancem na construção deste conceito.

Durante o encontro surgiram outras estratégias, como a observada na figura 6, em que o professor Jonatas representa segmentos ligados aos vértices da figura original e da figura rotacionada, porém não chega a nenhuma conclusão quando confrontado com algum contraexemplo. Notamos que os professores faziam rotações, porém não se preocupavam em apontar a direção e o ângulo de rotação. A ideia de centro de rotação não foi indicada também, e por isto iniciamos uma discussão sobre essa questão. Percebemos que os professores utilizam apenas da visualização para justificar suas construções. Desta maneira, solicitamos aos professores que pesquisassem sobre essa dúvida para discutirmos no encontro presencial seguinte. Diante dessas discussões levantamos a seguinte pergunta: Como encontramos o centro de rotação quando temos duas figuras e sabemos que uma foi obtida pela rotação da outra?

Figura 6 – Professor Jonatas tentando encontrar o centro de rotação.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 2015.

As atividades com o geoplano e a discussão sobre o centro de rotação criou um problema investigativo junto aos professores. Confirmando o que Fainguelernt *et al.* (2012) destaca quanto a geometria contribuir para este tipo de atividade.

Esse problema do centro incomodou os professores de modo que, no primeiro fórum do ambiente virtual, o professor Jonatas traz suas contribuições sobre o material disponibilizado e ao final explana que:

Quadro 1 - Comentário de Jonatas no fórum 1, 18/10/15.

[...] fiquei com uma dúvida sobre a simetria de rotação. Fiz uma pesquisa rápida, porém não encontrei nada a respeito: **Como determino o centro e ângulo de uma rotação?**

Fonte: Ambiente virtual, 2015 (*grifos nossos*).

Percebemos que somente quando questionado o professor busca uma resposta, ele sabia encontrar um exemplo de figura rotacionada, mas não compreendia todas as propriedades e elementos que compunham este conceito.

No terceiro encontro presencial, durante as sistematizações das isometrias, perguntamos novamente como se faz para determinar o centro de uma rotação. Entre um comentário e outro, os professores não conseguiram chegar a uma conclusão. Nesse momento, fomos à lousa e construímos dois polígonos já rotacionados, mostrando que, ao unirmos os pontos correspondentes por segmentos de reta e encontrarmos as mediatrizes de cada um desses segmentos, eles se encontram em um único ponto, que é o centro de rotação (fig. 3).

Conforme o comentário do professor Jonatas no ambiente virtual, também não encontramos essa discussão em livros tanto destinado a professores quanto livros didáticos. Essa discussão está contida no produto educacional⁵ desta pesquisa (OLIVEIRA; SILVA, 2016), disponibilizado *on-line*, com o objetivo oferecer aos professores um material de referências sobre os conceitos de transformações geométricas.

No quadro1 apresentamos um comparativo entre algumas definições de rotação que os professores escreveram no questionário inicial realizado no primeiro encontro presencial e no questionário final realizado na última atividade do curso. Destacamos que o questionário inicial foi realizado após a resolução de atividades com a manipulação do geoplano, porém sem sistematizações, e que o questionário final foi uma atividade de fechamento postado no ambiente virtual e entregue impresso no último encontro.

Quadro 2 - Comparação de definição no questionário inicial e no final.

Participante	Questionário Inicial	Questionário Final
Professor João	É o movimento em torno de um eixo (ponto).	É o movimento da figura/objeto sobre um eixo. É como prender um objeto e girar este com um ponto preso, fixo, sem deslocar daquele ponto.
Professor Jonatas	Deslocamento de todos os pontos sobre arcos de circunferências concêntricas e de mesmo ângulo.	Transformação geométrica que desloca o ponto sobre um arco de circunferência dado o centro de rotação, sentido da rotação e ângulo da rotação.

⁵ Mais informações ver em http://educimat.vi.ifes.edu.br/?page_id=1409.

Professora Júlia	<i>A figura gira x° em torno do seu eixo.</i>	<i>É uma transformação geométrica, na qual a figura gira em diferentes ângulos segundo um ponto central</i> (centro de rotação). Seus elementos: centro de rotação, imagem, sentido de rotação.
Professora Amanda	Rotação é a transformação geométrica que consiste em se obter uma mesma figura “girando” a figura inicial. Ao rotacionar uma figura em relação a um ponto fixo, <i>ponto este podendo ser um dos vértices da figura ou um ponto não pertencente à figura, também chamado de centro de rotação.</i>	Rotação é um movimento giratório. <i>Movimento de uma forma, ou ponto em torno de seu próprio eixo.</i>
Professora Débora	É quando a figura gira em um ponto (ângulo), <i>porém a figura continua congruente.</i>	<i>Um objeto semelhante depois de um determinado montante de rotação em relação ao ângulo.</i>

Fonte: Acervo da pesquisadora, 2015.

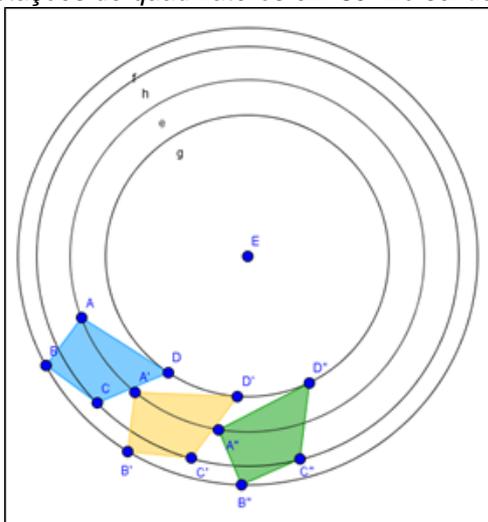
Destacamos em negrito algumas falas para serem analisadas. Notamos na maioria das falas que a definição de rotação está imbricada com a noção de giro, conforme observado no exemplo dado pelo professor João no questionário final. Percebemos no questionário inicial noções sobre as propriedades da rotação nas falas ‘ponto este podendo ser um dos vértices da figura ou um ponto não pertencente à figura, também chamado de centro de rotação’ e ‘a figura continua congruente’ das professoras Amanda e Débora, respectivamente.

Identificamos nas falas do questionário final erros conceituais sobre rotação. A definição da professora Débora está errada, pois ela utiliza o próprio termo que está definindo e não define o que é montante de rotação. A definição da professora Amanda relaciona-se com o movimento da terra, que é em torno do seu próprio eixo e também se chama rotação. Veloso (2012) advoga que todos nós associamos as palavras rotação e translação ao sentido em que são usadas na vida cotidiana, porém o professor não deve combater essa associação e sim aproveitá-la.

Apenas os professores Jonatas e Júlia recordam do sentido da rotação e fornecem definições corretas. A definição do Jonatas evidencia indícios de que ele consegue reconhecer e representar, mostrando a compreensão dos conceitos relacionados à translação desde início do curso. Essa evidência nos mostra que precisamos de mais de um momento ou um curso para conseguirmos construir alguns conceitos, não podemos ser ingênuos em achar que num curso de formação continuada com atividades investigativas conseguimos atingir a todos os professores. A seguir, apresentamos um exemplo que ilustra a definição dada pelo professor Jonatas, em que o quadrilátero amarelo foi obtido por meio da rotação de

30° no sentido horário do quadrilátero azul e o amarelo foi obtido por meio da mesma rotação obtendo o quadrilátero verde.

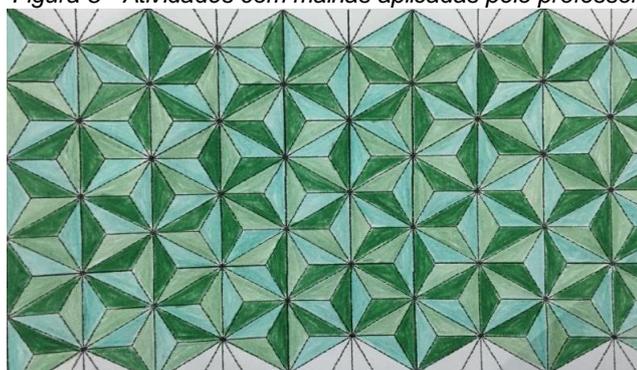
Figura 7 – Rotações de quadriláteros em 30° no sentido anti-horário.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 2016.

Ao final, os professores foram incentivados a aplicarem atividades em sala de aula que envolvesse os conteúdos abordados no curso. O professor Jonatas para introduzir o conceito de rotação planejou atividades com o uso de malhas com padrões variados, em que os alunos deveriam pintar uma transformação geométrica específica. Nesse momento, o conceito de rotação começou a ser formulado pela turma.

Figura 8 - Atividades com malhas aplicadas pelo professor Jonatas.



Fonte: Acervo da pesquisadora, 2015.

Esse professor também propôs a construção de geoplanos quadrados pela turma e abordou a rotação com ângulos 90°, 180° e 270°. Jonatas, que nunca utilizou nenhum material manipulativo em suas aulas, ao participar do curso sentiu-se motivado a utilizar esses materiais e apresenta a seguinte reflexão sobre sua experiência:

Quadro 3 - Reflexão de Jonatas sobre sua aprendizagem no curso.

Pude observar como o uso de materiais concretos manipulativos envolvem os alunos nas atividades, reduz o tempo perdido chamando a atenção dos alunos para quase zero e torna o processo de aprendizagem mais significativo, uma vez que o aluno é colocado como protagonista do processo.

Fonte: Acervo da pesquisadora, 2015.

Essa fala demonstra uma quebra de um preconceito em relação aos materiais manipulativos. Jonatas nunca havia utilizado, mas mesmo assim acreditava que isso demandava um tempo maior. Os demais professores participantes por meio de relatos e atividades fornecem indícios, mas ainda estão em processo de construção dos conceitos relacionados às transformações geométricas.

Considerações Finais

Neste recorte, percebemos a importância de cursos de formação para professores, que tem a oportunidade de aperfeiçoar seus conhecimentos e desenvolver-se profissionalmente, por meio das discussões e trocas de experiências no decorrer do curso.

Refletindo sobre o episódio apresentado sobre como encontrar o centro de rotação de duas figuras já rotacionadas, acreditamos que os professores construíram seus conhecimentos relacionados à rotação. Os professores relataram que não encontraram nenhuma referência sobre essa discussão em livros didáticos, de diversos níveis de ensino, e em sites de pesquisa. Acreditamos que essa discussão foi fundamental para que os participantes construíssem seus conhecimentos em relação à rotação, mesmo identificando que alguns ainda estão em processo de aprendizagem e construção do conceito.

Esse episódio mostra um elo de uma ação do curso para a construção do pensamento geométrico, durante os questionamentos, estabelecemos discussões sobre o assunto, a partir da metodologia utilizada e criamos um processo de negociação de significados, e por sua vez, reconstrução de conhecimentos.

O questionário avaliativo realizado ao final do curso, a fim de verificarmos a compreensão dos conceitos abordados mostram que os professores com o apoio do curso de formação tiveram a oportunidade de discutir e ampliar seus conhecimentos em relação as transformações geométricas.

Referências

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Instrumentação do ensino da geometria**. V.1, 2ª reimp. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CATUNDA, Omar; DANTAS, Martha Maria de Souza; NOGUEIRA, Eliana Costa, SOUZA, Neide Clotilde de Pinho; GUIMARÃES, Eunice da Conceição. **As transformações geométricas e o ensino de geometria**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1988.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman; NUNES, Katia Regina Ashton. **Matemática: Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio**. Porto Alegre: Penso, 2012.

FRAGA, Sandra Aparecida. **Um estudo sobre triângulos em livros didáticos a partir do movimento da matemática moderna**. 2004. 210f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2004.

GRANDO, Regina Célia; NACARATO, Adair Mendes; GONÇALVES, Luci Mara Gotardo. Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. **Cad. Cedes**, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 39-56, jan./abr. 2008.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria**. Rio de Janeiro: UFF/UAB/CEDERJ, 2008.

OLIVEIRA, Sabrine Costa; SILVA, Sandra Aparecida Fraga da. **Transformações geométricas: bordando conceitos e divulgando atividades**. Editora do Ifes, 2016.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**: Campinas, ano 1, n.1, p.7-17, 1993.

VALE, Isabel. **Materiais Manipulativos**. Viana do Castelo: ESE, 2002.

VELOSO, Eduardo. **Geometria: temas actuais**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 2000.

_____. **Simetria e transformações geométricas**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática – APM, 2012.