SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO ALTERNATIVA PEDAGÓGICA AO ENSINO DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO SUPERIOR.

Adil Ferreira Magalhães[1]

Matheus Guilherme Fernandes[2]

Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

O trabalho teve como objetivo planejar, programar e analisar criticamente os resultados de uma experiência de ensino utilizando softwares educacionais gratuitos, com interfaces amigáveis, visando conectar e integrar diferentes possibilidades de atuação didático-pedagógica para os conteúdos destacados na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II – Funções de Duas Variáveis - do curso de Licenciatura em Física do Instituto Federal do Paraná - Campus Telêmaco Borba. As atividades foram estruturadas no formato de Módulos Didáticos com a utilização dos softwares *Máxima* e *GeoGebra* e baseadas no Produto Educacional do professor Ms. Fábio Luiz de Oliveira, egresso do Programa de Mestrado Profissional da Universidade Federal de Ouro Preto - MG e desenvolvidas pelos estudantes do 3º Período do curso descrito. Os resultados indicaram descobertas significativas em relação ao tema abordado, visto que os estudantes executaram os módulos didáticos sem ter o conhecimento prévio do tema. As dificuldades apresentadas referiram-se aos registros algébricos e ao manuseio em relação aos comandos dos softwares.

Palavras-Chave: Funções de Duas Variáveis. Módulos Didáticos. Produto Educacional. Educação Matemática no Ensino Superior.

INTRODUÇÃO

Com o surgimento das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no âmbito educacional, principalmente na área da Educação Matemática, algumas discussões de grande relevância são mencionadas por pesquisadores da área em diversos trabalhos sobre o tema.

Segundo Kenski (2012, p. 47) "Não se trata apenas de um novo recurso a ser incorporado á sala de aula, mas de uma verdadeira transformação, que transcende até mesmo os espaços físicos em que ocorre a educação." Desta forma, constata-se que diversos professores utilizam essas tecnologias para formular produtos educacionais, trabalhos de pesquisa científica que visam disponibilizar contribuições para a prática profissional do professor de Matemática, tanto para o Ensino Básico

[1] Mestre em Educação Matemática pela UFOP-MG; Professor EBTT do Instituto Federal do Paraná – IFPR; adil.magalhaes@ifpr.edu.br

[2] Graduando em Licenciatura em Física. Bolsista do Programa PIBIC-IFPR; matheusgfer1997@gmail.com

como para o Ensino Superior. Sendo assim, tais trabalhos contribuem para a formação do professor de matemática e estão disponibilizados nas páginas dos programas de pós-graduação das instituições credenciadas.

Nesse contexto, o projeto PIBIC do Instituto Federal do Paraná Campus Telêmaco Borba (IFPR-TB) intitulado SOFMAT (A utilização de softwares educacionais nas aulas de matemática), foi elaborado com a perspectiva de aperfeiçoar, com a utilização de softwares educacionais gratuitos de interfaces simples, as atividades de ensino.

Nesse sentido, foram planejadas três atividades para as aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II com os softwares *Máxima* e *GeoGebra*, no formato de Módulos Didáticos, que segundo Dalben (2012, p. 92), "representam um plano em que um conjunto de experiências de aprendizagem é organizado visando permitir que o estudante atinja os objetivos propostos, com níveis de competências previamente definidos".

O desenvolvimento dos Módulos Didáticos seguiu as seguintes etapas:

1) *Planejamento e preparação do material:* Momento onde foram definidas as características e objetivos das atividades de forma bem específica através da formulação dos módulos;

2) *Aplicação do Módulo Didático:* Momento onde foram apresentadas as instruções e as atividades dos módulos, além de ter sido nessa etapa que realizaram-se as observações;

3) *Avaliação dos módulos didáticos:* Última etapa do processo, na qual ocorreram os *feedbacks* e discussões com os estudantes.

Utilizou-se para elaboração das atividades dos módulos didáticos o Produto Educacional do Prof. Ms. Fábio Luiz de Oliveira e os softwares *Máxima* e *GeoGebra*.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Durante a aprendizagem matemática é necessária à aquisição e apropriação das linguagens natural, algébrica e gráfica, além disso, é necessário o trânsito entre essas linguagens e principalmente a realização de conversões desses registros, maneiras com as quais o objeto pode ser representado, segundo Duval (2003, p.16) "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados", ele ainda diz que:

> Existe como que um “enclausuramento” de registros que impede o estudante de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos estudantes de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem (DUVAL, 2003, p.21).

Percebe-se então que os softwares educacionais proporcionam condições para resolução de problemas matemáticos de forma envolvente e menos abstrata. Segundo Borba (2010, p.3) “os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver uma atividade ou problema matemático” além de serem capazes de reter a atenção dos estudantes e proporcionar-lhes discussões para a construção do conhecimento matemático.

Sendo assim, os softwares educacionais são facilitadores da aprendizagem, já que com o auxílio deles, o professor pode explorar atividades investigativas utilizando as linguagens natural, algébrica e gráfica. Conforme Borba (2010, p.4),

> Uma abordagem que privilegia uma postura investigativa pode possibilitar um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo e os levar a uma investigação de conceitos, que podem vir a obter um novo sentido quando estudados de modo a enfatizar questões qualitativas de exploração (BORBA, 2010, p.4).

Um ponto importante que não deve ser esquecido é quanto ao objetivo do estudante de fazer descobertas e conjecturar a respeito do tema estudado. A visualização dos objetos matemáticos através da tela do computador proporciona ao estudante construções mentais necessárias para a aprendizagem dos assuntos abordados. Segundo Kenski (2012, p.45) “a imagem, o som e o movimento oferecem informações mais realistas em relação ao que esta sendo ensinado”.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A formulação e inserção dos Módulos Didáticos ocorreram através das seguintes etapas: 1) Planejamento e preparação do material; 2) Aplicação dos módulos didáticos; 3) Avaliação dos módulos didáticos. Tais módulos foram constituídos com uma sequência de três atividades de ensino, baseadas no produto educacional de mestrado profissional do professor Ms. Fábio Luís de Oliveira (UFOP, 2014), e desenvolvidas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, com a utilização dos softwares *Máxima* e *GeoGebra* no curso de Licenciatura em Física 3º Período do IFPR-TB.

O planejamento constituiu-se de encontros semanais para teste e elaboração dos Módulos Didáticos. Alguns comandos foram redimensionados para facilitar a execução das atividades e foram ampliadas para inserção do software *GeoGebra*.

A aplicação dos módulos constituiu-se em três encontros de 1 hora e 40 minutos semanais, com a utilização de notebooks dos estudantes, um por grupo de estudo, desenvolvendo atividades que levaram em consideração os objetivos estabelecidos pela ementa da disciplina. Coube ao professor e ao bolsista a responsabilidade de atender os estudantes para utilização de alguns comandos, mas sem interferências na resolução das atividades propostas. Durante esses encontros foram realizadas atividades sobre Funções de Duas Variáveis, através de grupos formados pelos estudantes regularmente matriculados na disciplina.

Constavam dos Módulos Didáticos, atividades de cunho exploratório e investigativo desenvolvidas pelo professor e coordenador do projeto auxiliado pelo bolsista e com base no seguinte roteiro:

1) Leitura e explicação do assunto;
2) Informações sobre os comandos a serem utilizados nos softwares;
3) Desenvolvimento das atividades;
4) Espaço para dúvidas em relação aos comandos.

A avaliação dos Módulos Didáticos foi realizada semanalmente de acordo com as anotações do diário de campo, dos protocolos das atividades e de uma avaliação processual, levando em consideração a fundamentação teórica, onde as condições de aquisição dos conhecimentos matemáticos devem estar interligadas com a coordenação entre os registros de representação semiótica que visam fortemente o desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

RESULTADOS

As atividades foram analisadas com base nas respostas enviadas pelos acadêmicos e pelas observações do diário de campo, visando entender quais foram os aprendizados aparentes (descobertas) dos estudantes e as dificuldades encontradas na realização dos módulos didáticos em relação ao conteúdo e a utilização dos softwares, como pode ser observado na figura e no quadro abaixo:

Figura 1 – Anotação realizada no diário de campo sobre a atividade 1

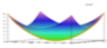
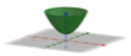
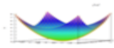
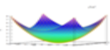
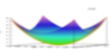
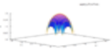
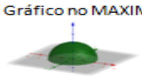
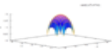
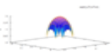
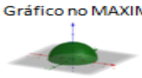
1ª Aula - Gráfico de funções de duas variáveis e seus respectivos domínios:

Durante essa aula foram explorados os gráficos e o domínio de funções de duas variáveis com o auxilio dos softwares MAXIMA e GEOGEBRA. A primeira dificuldade encontrada pelos estudantes foi na hora de adicionar as funções no software MAXIMA devido a necessidade do comando ***f(x,y):=expressão; shift+ enter*** , a segunda dificuldade encontrada pelos grupos em geral foi para salvar os gráficos do máxima. Já no GEOGEBRA a grande dificuldade enfrentada foi na hora de colocar os intervalos.

OBSERVAÇÃO: Durante a tentativa de encontrar o domínio das funções os mesmos se confundiam mesmo com o texto estando explicito.

Fonte: Diário de campo

Quadro 1 - Módulo Didático - Atividade 1

Respostas do Módulo Didático Atividade 1: Gráfico de uma função de duas variáveis e seu respectivo domínio.		
1.e)Você observa alguma modificação na aparência da superfície obtida?		
$f(x,y) = x^2 + y^2$  Gráfico no MAXIMA  Gráfico no GEOGEBRA	Grupo 1	Sim. Quando varia-se x e y para valores maiores, a figura vai se expandindo verticalmente. As "arestas" da figura parecem variar mais a medida que x e y aumentam, dando a impressão que se aumentarmos x e y um valor específico, as arestas irão se unir.
	Grupo 2	Sim, quanto maior o intervalo, melhor é formada a superfície do objeto 3D, pois ele ganha bordas mais robustas.
	Grupo 3	A superfície formada pela imagem é a mesma em todos os gráficos, alterando apenas os intervalos correspondentes de cada um deles.
	Grupo 4	Conforme os intervalos aumentam, o formato da figura permanece o mesmo, mas a escala aumenta, portanto a figura aumenta.
	Grupo 5	Não respondeu
1.e-1) Existe mais de um gráfico para a função f(x, y)? Explique		
 Gráfico no MAXIMA	Grupo 1	Não, o gráfico é único. Mas a medida que o limite de x e y aumentam, a figura visualizada no gráfico muda.
	Grupo 2	Não, pois a combinação das duas variáveis gera apenas um gráfico.
	Grupo 3	Não, Pois para uma função de 2º grau formasse um gráfico em forma de parábola.
	Grupo 4	Não. Aparentemente na imagem sim, mas o gráfico gerado pela função é o mesmo para todos os intervalos.
	Grupo 5	Não respondeu
1.e-2) É possível esboçar o gráfico da função f(x, y) para quaisquer valores de x e de y?		
 Gráfico no MAXIMA	Grupo 1	Sim.
	Grupo 2	Sim.
	Grupo 3	Sim porque sendo a mesma função qualquer valor colocado satisfaz a equação.
	Grupo 4	Sim. Não existe restrição para a função, para qualquer domínio existe uma imagem
	Grupo 5	Não respondeu.
1.e-3) Qual é o domínio?		
 Gráfico no MAXIMA	Grupo 1	D = (x, y) ∈ ℝ
	Grupo 2	O domínio da função são todos os valores de x e y,
	Grupo 3	Domínios da função são todos os valores reais de (x,y)
	Grupo 4	Domínios da função são todos os valores reais de (x,y)
	Grupo 5	Não respondeu.
2.b)Encontre os valores de g(1,1), g(2,0) e g(3,3).		
$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  Gráfico no MAXIMA  Gráfico no GEOGEBRA	Grupo 1	g(1,1)= 2, g(2,0) = 0 e g(3,3) ∄
	Grupo 2	f(1,1) = 1,41, f(2,0) = 0, f(3,3) = indefinido
	Grupo 3	Resolvendo a função deste exercício substituindo os pontos g(1,1): [(-1²) - 1² + 4], teremos como resposta: √2, que é aproximadamente 1,41 Resolvendo a função com os pontos g(2,0): [(-y²)-x²+4] ; [(-2²) - 0² + 4], sendo encontrado como resposta 0 (zero). Agora se resolvermos com os pontos g(3,3): [(-y²) – x² + 4]: [(-3²) – 3² + 4], podemos ver que esse resultado não existe e não será possível fazer um gráfico desses pontos.
	Grupo 4	g(1,1)= √2; g(2,0)=0; g(3,3)
	Grupo 5	Não respondeu
2.c) Que região do plano xy corresponde ao Domínio da função g(x,y)? Qual a Imagem da função?		
 Gráfico no MAXIMA	Grupo 1	D = {(x, y) ∈ ℝ/ x²+ y² ≤ 4}
	Grupo 2	Domínio = y -2 até y 2. x -2_até x 2. Imagem = z 0 até z 2.
	Grupo 3	A região que x,y que vai corresponder ao Domínio são os limites aplicados na função. A imagem correspondente será o eixo Z, até a altura máxima do desenho.
	Grupo 4	O domínio corresponde aos valores de (x,y) e a imagem são os valores de g(x,y) ou valores correspondentes ao eixo (z)
	Grupo 5	Não respondeu
3) Explore as visualizações das funções anteriores no GEGOGEBRA e compare-as. O que você pode dizer a respeito das representações obtidas no MAXIMA e no GEOGEBRA?		
 Gráfico no MAXIMA  Gráfico no GEOGEBRA	Grupo 1	Comparando, percebemos uma diferença considerável nos gráficos dos dois softwares, tendo no MÁXIMA, um gráfico mais definido, enquanto que no GEOGEBRA, o gráfico dá uma visão geral de qual é o comportamento da função.
	Grupo 2	Enquanto o MAXIMA apresenta as formas limitadas pelos intervalos, o GEOGEBRA permite visualizar todo o modelo 3D, permitindo entender o comportamento da função.
	Grupo 3	As representações gráficas como podemos observar apresentam diferenças entre um programa e outro, por mais que a estrutura dos desenhos sejam iguais é possível observar que no MÁXIMA nos mostra o eixo z fora do desenho e o GEOGEBRA nos apresenta o desenho em torno do eixo z.
	Grupo 4	No GEOGEBRA a imagem aparece inteira, podendo nos dar uma melhor visualização do objeto formado pela função, porem no MÁXIMA a visualização é de apenas uma parte da figura formada
		pela função pois precisa ser colocado os pontos de (x,y).
	Grupo 5	Não respondeu.

Fonte: Protocolo dos estudantes

Na análise da Atividade 1, ficou explícito que os estudantes conseguiram entender que os gráficos das funções são únicos, assim como nas funções de uma variável. Notou-se ainda, que os estudantes perceberam a inexistência de restrição no domínio da primeira função, apesar de não conseguirem expressar-se em linguagem algébrica, utilizando, nesse caso, a linguagem natural.Já em relação à segunda função dessa atividade ficou evidente o entendimento do conceito de imagem (eixo z) de funções de duas variáveis, mas ainda ocorreram problemas com relação à linguagem algébrica, utilizando, como recurso, novamente a linguagem natural.

Na segunda atividade foi inserido um novo assunto – Curvas de nível de funções de duas variáveis - com a qual os estudantes responderam questões que tinham por objetivos a aquisição do conceito de curvas de nível e sua representação no plano XOY.Durante a Atividade 2, foi utilizado principalmente o software *Máxima*, por apresentar melhor visualização das curvas de nível das funções de duas variáveis. A janela *gnuplot graph* do software oportuniza ao estudante a visualização do gráfico em “diferentes ângulos”.A dificuldade encontrada nessa atividade teve sua origem nos detalhes dos comandos apresentados no módulo, sendo resolvido com a interferência imediata do professor e do bolsista.

Figura 2– Anotação realizada no diário de campo sobre a atividade 2

2ª Aula - Visualização das curvas de nível de uma função de duas variáveis:

Nessa aula foram vistas e exploradas graficamente as curvas de nível, com a utilização principalmente do MAXIMA, visto que os comando foram enviados juntamente aos módulos, a grande dificuldade foi que quase todos copiavam com um espaço adicional no comando,devido ao modulo didático da atividade numero 2 não possuía todos os detalhes dos comandos, fazendo assim com que o mesmo não funcionasse.

Fonte: Diário de campo

Analisando as respostas dos protocolos sobre as Funções de Duas Variáveis percebe-se que os estudantes entenderam a relação entre as curvas de nível (imagem fatiada) e o gráfico da função. Além disso, conseguiram visualizar as curvas no plano XOY. O quadro seguinte, descreve as respostas dos estudantes para a Atividade 2.

Quadro 2 - Módulo Didático - Atividade 2

<table>
<tr><td colspan="3">Respostas do Módulo Didático Atividade 2: Curvas de Nível de uma função de duas variáveis.</td></tr>
<tr><td colspan="3">1.f) Compare as imagens obtidas na visualização pedida no item e com as curvas do item d. O que você observa?</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Gráfico da Função: $f(x,y) = x^2 + y^2$

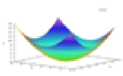
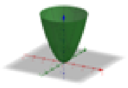
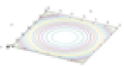
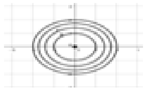
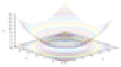

 

Gráfico no MAXIMA Gráfico no GEOGEBRA
Curvas de Nível no MAXIMA refletidas:
 
No Espaço e No Plano</td><td>Grupo 1</td><td>É como se estivéssemos olhando o gráfico de cima, observando as curvas e as distâncias entre elas.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Comparando os dois gráficos, percebe-se as curvas de nível da função f(x,y) = x^2+y^2, sendo então cada ponto dessas curvas são as coordenadas de x e y no gráfico x,y,z.</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>São curvas iguais, pois pertencem a estrutura do mesmo desenho..</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>Não respondeu.</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>As curvas de níveis obtidas nos dois tipos de comandos utilizados favorecem a compreensão do mapa de contorno de uma função. Pode se observar que a curva de níveis tem os centros em (0,0). Conclui-se que a f(x,y) é uma superfície em revolução em torno de oz.</td></tr>
<tr><td colspan="3">1.h) Esboce, no GEOGEBRA, as expressões das curvas de nível obtidas a partir da função f(x, y) para valores de z = 0, z = 1, z = 2 e z = 3. Que tipo de curvas são essas?</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Esboço através das expressões:

No GEOGEBRA e No MAXIMA</td><td>Grupo 1</td><td>São circunferências de centro na origem.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Não respondeu.</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>Não respondeu.</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>Não respondeu.</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>Não respondeu</td></tr>
<tr><td colspan="3">1.i)Você acha que as curvas de nível dão algum tipo de informação sobre o gráfico da função? É possível imaginar o gráfico de uma função conhecendo os traçados das curvas de nível e os respectivos valores de z? Explique.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Curva de Nível visualizada no Plano e no Espaço:

No MAMIMA</td><td>Grupo 1</td><td>Sim, elas fornecem uma noção do formato do gráfico desde que os respectivos valores de z sejam conhecidos. Pois assim, poderemos saber se este gráfico expande na direção positiva ou negativa.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Sim, as curvas de nível permitem visualizar e deduzir a localização dos pontos e, consequentemente, o formato da imagem tridimensional.</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>Sim, pois nos mostra os “pontos” com os quais os gráficos serão formados.</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>Não respondeu.</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>Não respondeu.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2.f) Compare as imagens obtidas na visualização pedida no item e com as curvas do item d. O que você observa?</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Gráfico da Função: $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 - y^2}$

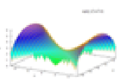
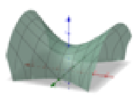
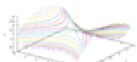

 

Gráfico no MAXIMA Gráfico no GEOGEBRA
Curvas de Nível no MAXIMA refletidas:
 
No Espaço e No Plano</td><td>Grupo 1</td><td>É como se estivéssemos olhando o gráfico de cima, observando as curvas e as distâncias entre elas, sabendo que as assíntotas definem o limite de proximidade entre as hipérboles.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>É possível perceber a formação do contorno do gráfico nos planos x e y, no formato de linhas.</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>São curvas iguais, pois pertencem a estrutura do mesmo desenho.</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>Não respondeu.</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>Representação gráfica em hipérbole sobre o eixo 0 em x.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2h) Esboce, no GEOGEBRA, as expressões das curvas de nível obtidas a partir da função f(x, y) para valores de z = 0, z = 1, z = 2 e z = 3. Que tipo de curvas são essas?</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Esboço através das expressões:

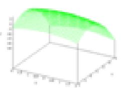
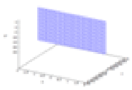
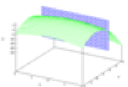
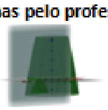
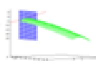
No GEOGEBRA e No MAXIMA</td><td>Grupo 1</td><td>São hipérboles.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Não respondeu</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>Não respondeu</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>Não respondeu</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>Não respondeu</td></tr>
<tr><td colspan="3">2.i) Você acha que as curvas de nível dão algum tipo de informação sobre o gráfico da função? É possível imaginar o gráfico de uma função conhecendo os traçados das curvas de nível e os respectivos valores de z? Explique.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Curva de Nível visualizada no Plano e no Espaço:

No MAXIMA</td><td>Grupo 1</td><td>Tendo a assíntota como referência do gráfico é possível imaginar, e sabendo os valores de z das hipérboles para cada direção. As assíntotas servem como um”eixo” dividindo as hipérboles em quadrantes que expandem igualmente.</td></tr>
<tr><td>Grupo 2</td><td>Sim, as curvas de nível permitem visualizar e deduzir a localização dos pontos e, consequentemente, o formato da imagem tridimensional.</td></tr>
<tr><td>Grupo 3</td><td>Já respondia na questão nº 1</td></tr>
<tr><td>Grupo 4</td><td>Não respondeu</td></tr>
<tr><td>Grupo 5</td><td>Não respondeu</td></tr>
</table>

Fonte: Protocolo dos estudantes

Na terceira atividade (Quadro 3), os estudantes desenvolveram o estudo das derivadas parciais, interpretação geométrica e resolução algébrica, com o auxílio do software *Máxima* (A visualização no *GeoGebra* foi mostrada pelo professor para complementar o módulo).

Quadro 3 - Módulo Didático - Atividade 3

Respostas do Módulo Didático Atividade 3: Derivadas Parciais e seus Gráficos.		
Gráficos plotados nos Softwares pelos estudantes.	**1. Derive as funções e insira neste espaço.**	
Situação proposta para a construção dos gráficos: $f(x,y) = 8 - x^2 - 2y^2$ P=(1,2) Em relação a x.	Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5	a) $f(x,y) = 3x - 2y^4$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -8y^3$ b) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 6xy$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2$ c) $f(x,y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 + 9x^2y^2 + 3y^4$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 12xy^3$ d) $f(x,y) = 8 - x^2 - 2y^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -4y$
Gráficos separados e unidos no plano	**4. 1 Que tipo de curva você observa na interseção do plano XOY com a superfície da função?**	
	Grupo 1	Uma Parábola
	Grupo 2	Uma Parábola
	Grupo 3	A curva é uma Parábola (Respondeu com questão 4.1)
	Grupo 4	Uma curva parabólica com concavidade para baixo(Respondeu com questão 4.1)
Gráfico da Função no MAXIMA	Grupo 5	Concavidade para baixo
	5. 1 Que conclusão você estabelece em relação à função de uma variável?	
 Gráfico do plano y=2 no MAXIMA	Grupo 1	Na função de uma variável, o coeficiente angular da reta tangente é igual à derivada da função, num ponto determinado. No gráfico acima, a reta tangente é a interseção da função com o plano y = 2. A partir disso podemos apenas supor que as derivadas Parciais são o coeficiente angular da reta tangente no plano x e y determinados. .
	Grupo 2	Enquanto as derivadas de função de uma variável resulta em uma reta que mede o coeficiente angular da reta tangente a curva do ponto dado, a derivada de uma equação com duas variáveis resulta em reta que mede a tangente da superfície em um dado ponto.
	Grupo 3	Quando a função tem duas variáveis se obtêm dois gráficos onde ambos tem o mesmo ponto de interseção formando assim uma reta tangente.
Escala dos eixos x e y no MAXIMA	Grupo 4	Na função de uma variável quando derivamos obtemos o coeficiente angular da reta, e na função de duas variáveis nós concluímos que obtemos a reta tangente.
	Grupo 5	Não existe outro plano que intercepte a reta quando se trata de uma variável.
Gráficos da curva com a reta tangente:	**IMPORTANTE: No espaço abaixo, escreva as descobertas obtidas na visualização e as dificuldades obtidas na realização do módulo didático.**	
 No GEOGEBRA (lateral) **Apenas pelo professor**	Grupo 1	Obtivemos uma noção de como se comporta a reta tangente num gráfico da função de duas variáveis. Obtivemos muitas dificuldades na interpretação do módulo.
	Grupo 2	Descobertas: → Como a derivada é representada quando os eixos são (x,y,z) → Significado geométrico da derivada parcial Dificuldades: → Visualizar como a derivada se apresenta no gráfico dos 3 eixos → Identificar com clareza as curvas geradas pelas interseções dos gráficos
 No GEOGEBRA (frente) **Apenas pelo professor**	Grupo 3	1º a falta da tecnologia do grupo; 2º Dificuldade na compreensão devido a várias interpretações do grupo;
 No MAXIMA	Grupo 4	Descobrimos que quando derivamos a função, obtemos dois gráficos distintos, e ao derivarmos uma função de 2 variáveis obtemos a reta tangente. Dificuldades Pouca pratica com o manuseio do gráfico em 3D.
	Grupo 5	-Foi possível obter uma visualização mais ampla do gráfico - Dificuldade em manusear as propriedades do Máxima

Fonte: Protocolo dos estudantes

Durante essa atividade os estudantes entenderam qual curva estava sendo analisada e sua relação com a interpretação geométrica da derivada de uma função de uma variável. Muitos estudantes tiveram dificuldade ao realizar os comandos no software durante essa etapa. Percebeu-se que a falta de atenção dos estudantes é um dos fatores que prejudica a aprendizagem, gerando dificuldades que até o momento eram inexistentes (Figura 3).

Figura 3 – Anotação realizada no diário de campo sobre a atividade 3

3ª Aula - Estudo de derivadas parciais e sua visualização gráfica:

Durante a terceira aula, o grande problema enfrentado foi a leitura, que não foi realizada pelos estudantes como havia sido recomendado, visto que os mesmos desejavam realizar as atividades rapidamente. Outro ponto que os estudantes esqueceram inúmeras vezes foi a aplicação da Regra da Homogeneidade.

Fonte: Diário de campo

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados indicaram descobertas significativas em relação ao tema abordado, visto que os estudantes executaram os módulos didáticos sem ter o conhecimento prévio do tema. As dificuldades apresentadas referiram-se à utilização dos softwares e aos registros algébricos. Os problemas enfrentados pelos estudantes quanto à utilização dos comandos foram solucionadas com a assistência do professor e do bolsista. Quanto às dificuldades apresentadas nos registros algébricos o professor fez a correção durante o *feedback.*

A deficiência na utilização da linguagem algébrica é um fator impeditivo da aprendizagem matemática, que causa um aprisionamento do estudante, limitando-o, às vezes, na apropriação de saberes. Entretanto, ficou evidente que os ambientes computacionais proporcionam condições para a resolução de atividades, visto que com o auxílio dos softwares (mesmo com suas limitações) foi possível resolver as questões utilizando a linguagem gráfica e natural não comprometendo a obtenção desses conhecimentos.

Segundo Borba (2010, p.4) “Uma abordagem que privilegia uma postura investigativa pode possibilitar um envolvimento maior dos estudantes com o conteúdo”, assim seguindo esse pensamento os softwares educacionais têm essa abordagem já que proporcionam duas formas de representação, a algébrica e a gráfica, dando assim a oportunidade ao estudante de realizar conversões para facilitar o entendimento do assunto. Essas representações gráficas (através de imagens) segundo Kenski (2012, p.45) “oferecem informações mais realistas em relação ao que está sendo ensinado”.

Outra dificuldade apresentada durante a utilização dos softwares referiu-se ao manuseio dos comandos inseridos nos módulos didáticos que, como destacado, foi providencialmente sanada com a interferência dos pesquisadores.

Após a realização dos módulos didáticos, os estudantes foram submetidos a uma avaliação processual. Os resultados obtidos foram satisfatoriamente significativos, como se pode observar no quadro seguinte.

Quadro 4 – Resultado da Avaliação Processual

Duplas	Conceito	Critérios de Avaliação
D_1	C	**Conceito C** - a aprendizagem do aluno foi SUFICIENTE e atingiu níveis aceitáveis aos objetivos propostos, sem comprometimento à continuidade no processo ensino aprendizagem.
D_2	B	**Conceito B** - a aprendizagem do aluno foi PARCIALMENTE PLENA e atingiu níveis desejáveis aos objetivos propostos no processo ensino aprendizagem.
D_3	D	**Conceito D** - a aprendizagem do aluno foi INSUFICIENTE e não atingiu os objetivos propostos, comprometendo e/ou inviabilizando o desenvolvimento do processo ensino aprendizagem.
D_4	C	**Conceito C** - a aprendizagem do aluno foi SUFICIENTE e atingiu níveis aceitáveis aos objetivos propostos, sem comprometimento à continuidade no processo ensino aprendizagem.
D_5	D	**Conceito D** - a aprendizagem do aluno foi INSUFICIENTE e não atingiu os objetivos propostos, comprometendo e/ou inviabilizando o desenvolvimento do processo ensino aprendizagem.
D_6	A	**Conceito A** - quando a aprendizagem do aluno foi PLENA e atingiu os objetivos propostos no processo ensino aprendizagem.
D_7	A	**Conceito A** - quando a aprendizagem do aluno foi PLENA e atingiu os objetivos propostos no processo ensino aprendizagem.

Fonte: Diário de Classe

Analisando os conceitos, verifica-se que, das sete duplas submetidas à avaliação processual, cinco delas obtiveram conceito relevante e atingiram o objetivo proposto nessa atividade. A avaliação processual teve como objetivos a determinação de Domínio e Imagem de uma Função de Duas Variáveis; identificação das Curvas de Nível de Funções de Duas Variáveis; determinação de Derivadas Parciais de Primeira Ordem. Nessa avaliação, os resultados das questões nº 2 e nº 5, não foram computados para elaboração do quadro 4, pois seus objetivos não foram abordados pelas atividades desenvolvidas nos módulos didáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades desenvolvidas pelos estudantes através dos módulos didáticos com utilização dos softwares educacionais proporcionaram a apropriação dos conhecimentos matemáticos do tema podendo ser observado através dos resultados consistentes da avaliação processual e das respostas coerentes nos protocolos das atividades desenvolvidas.

Isso ocorreu, principalmente, pelo fato de que, apesar do tema estudado ser de difícil compreensão e visualização, os softwares utilizados possibilitaram construtos matemáticos consistentes, aperfeiçoamento na visualização de curvas tridimensionais e, consequentemente resultados significativos na utilização das linguagens natural, algébrica e gráfica.

Além disso, o desenvolvimento do trabalho em grupo e o retorno dado aos estudantes após o término de uma atividade e antes do início da seguinte é fundamental para que se oportunize algum tipo de síntese das aprendizagens potenciais proporcionadas pela atividade que termina e para aquela que se inicia, promovendo o "reconhecimento do desempenho e da aprendizagem do estudante" (DALBEN, 2012, p. 93) estimulando novas possibilidades de exploração e investigações futuras através das discussões entre professor e estudantes.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho. Softwares e Internet na sala de aula de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010. **Anais**... Salvador, 2010. p.1-11.

DALBEN, Ângela Imaculada Loureiro de Freitas. O módulo Didático: uma tecnologia para EAD. In: VEIGA, Ilma Passos Alencastro et al. **Técnicas de ensino:** novos Tempos, Novas configurações. 3. Ed. São Paulo: Papirus, 2012. cap. 4, p. 85-103.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática, In: MACHADO. Silva Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. 1. Ed.São Paulo: Papirus, 2003.cap. 1, p. 11-33.

KENSKI, Vani Moreira. Tecnologias também servem para fazer educação. In: KENSKI, Vani Moreira. **Educação e Tecnologias o Novo Ritmo da Informação**. 8. Ed. São Paulo: Papirus, 2012. cap. 3, p. 43-62.

OLIVEIRA, Fábio Luiz de. **Abordagem de conceitos de funções de duas variáveis com o uso do software Máxima**.2014. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) -Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.