



## ATIVIDADES-MATEMÁTICAS-COM-REALIDADE-AUMENTADA<sup>1</sup>: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Felipe Diego Bulla<sup>2</sup>

Maurício Rosa<sup>3</sup>

### Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

**Resumo:** Esse minicurso tem o propósito de contribuir para a Cyberformação<sup>4</sup> (ROSA, 2015a, 2015b) com professores e futuros professores de matemática, de forma a trabalharmos com os recursos do programa Blender<sup>5</sup> e do aplicativo AndAR<sup>6</sup> para a construção e resolução de Atividades-Matemáticas-com-Realidade-Aumentada. Nesse ínterim, pretendemos abordar o conceito de função de uma e duas variáveis reais, compreendendo, em especial, as superfícies geradas por funções do segundo tipo, conforme restringimos o seu domínio. Revelaremos a partir dessa proposta como a percepção (BULLA; ROSA, 2017) pode potencializar/transformar o *design* de Atividades-Matemáticas-com-Realidade-Aumentada no estudo de funções reais. Desse modo, defendemos que o professor de matemática poderá criar práticas pedagógicas com o uso de Tecnologias Digitais (TD) de Realidade Aumentada (RA) para o ensino de funções em geral.

**Palavras Chaves:** Educação Matemática. Função de Duas Variáveis Reais. Cyberformação. Tecnologias Digitais.

### Objetivos

- Apresentar algumas características dos *softwares* Blender e AndAR para produção de um ambiente de RA;
- Introduzir a construção e manipulação de objetos virtuais tridimensionais, descritos por funções de duas variáveis reais, no programa Blender e no aplicativo AndAR, respectivamente;

---

<sup>1</sup> A expressão “Realidade Aumentada” (RA) pode ser entendida como “[...] o enriquecimento do ambiente real com objetos virtuais, usando algum dispositivo tecnológico, funcionando em tempo real.” (KIRNER; SISCOOTTO, 2007, p. 10).

<sup>2</sup> Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGE-MAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). felipedbulla@gmail.com

<sup>3</sup> Professor Doutor da Faculdade de Educação e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGE-EMAT) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). mauriciomatematica@gmail.com

<sup>4</sup> “[...] *Cyberformação com professores de matemática*: a formação vista sob a dimensão específica (matemática), pedagógica e tecnológica que assume o uso de TD, particularmente, o ciberespaço em ambiente de EaD, sob a perspectiva do ser-com, pensar-com e saber-fazer-com-TD” (ROSA, 2015a, p.77).

<sup>5</sup> *Software* utilizado, por exemplo, para modelagem, animação, edição de vídeo e criação de aplicações interativas 3D, tais como jogos, apresentações e etc. Além disso, Blender é um programa multiplataforma, disponível para computadores instalados com os sistemas operacionais: Windows, MAC ou Linux (BARCELOS et. al., 2009).

<sup>6</sup> Aplicativo disponível para instalação em *smartphones* com sistema operacional Android, direcionado para o uso de RA (DOMHAN, 2010).

- Trabalhar Atividades-Matemáticas-com-Realidade-Aumentada ao final do minicurso, no intuito de tornar as Tecnologias Digitais partícipes do processo de ensino e aprendizagem.

### **Justificativa**

As Tecnologias são tão antigas quanto a existência da espécie humana (KENSKI, 2007) e, desde então, os conhecimentos derivados, a partir da inovação de Tecnologias, estimulam o pensamento do ser humano em busca de diferentes recursos tecnológicos. Nesse sentido, compreendemos que as Tecnologias Digitais (TD) interferem no processo de evolução do ser humano e, reciprocamente, o ser humano contribui para dar continuidade ao processo de desenvolvimento das TD. Logo, isso pode ser considerado um processo de *forma/ação* (BICUDO, 2003), plasticamente uma ação que se forma e modela na própria ação, contínua e infindável.

A Cyberformação (ROSA, 2015) vem a ser uma formação-com-TD. Em razão das TD estarem em constante transformação e inovação, é possível entendermos a Cyberformação como um processo de formação conforme Bicudo (2003), isto é, um processo contínuo e infindável, em constante aprimoramento. Outrossim, podemos compreender que a Cyberformação com professores de matemática

[...] liga-se à intencionalidade desse professor ao estar com a tecnologia. Não se fala de um estar mecânico; não se pensa em uma formação de uso técnico das tecnologias, como se essas fossem recursos auxiliares ao ensino e à aprendizagem; mas, de uma formação que lida e considera as TD como meios que participam ou devam participar, efetivamente, da produção do conhecimento matemático [...] (ROSA, 2015, p. 4)

As tecnologias de RA, segundo Kirner e Siscoutto (2007), aparentam ser a próxima geração de interface popular a serem aplicadas nas mais variadas áreas de conhecimento. Realmente, Kirner e Siscoutto. (2007, p. 239), citam uma aplicação das tecnologias de RA, no campo da medicina, relacionada a um aparelho capaz de corrigir uma deficiência visual do paciente. Sob outra perspectiva, Kirner (2011) exhibe um modelo de jogo com carros de papel, envolvendo, inclusive, uma ambiente de RA. Em virtude dessas considerações, entendemos que as tecnologias de RA podem ser relevantes para a Educação Matemática, uma vez que observamos suas aplicações em contextos distintos.

Desse modo, entendemos que o uso de TD de RA pode potencializar o estudo de funções de duas variáveis reais através da percepção conforme discutido por Bulla e Rosa (2017). Nesse caso, o *design* de atividades (BULLA; ROSA, 2017) com-RA e a autorreflexão do próprio processo de construção dessas atividades, mostrou que as

TD podem interferir e participar, efetivamente, na produção de conhecimento matemático (ROSA, 2015), contribuindo, do mesmo modo, para Cyberformação do professor ou futuro professor de matemática.

Podemos encontrar e verificar em Anton (2000, p. 313) que uma função de duas variáveis reais é definida como: “[...] uma regra que associa um único número real  $f(x, y)$  para cada ponto  $(x, y)$  de algum conjunto  $D$  no plano  $xy$ ”. O conjunto  $D$  ao qual Anton (2000) se refere é o próprio domínio da função  $f$ , ou seja, ele é o conjunto que restringe as variáveis  $x$  e  $y$  da função  $f$ . Com efeito, Anton (2000) cita exemplos de funções de duas variáveis como a fórmula para calcular a área de um retângulo, dada por  $A_{\text{retângulo}} = b \times h$ , tal que  $b$  representa a base do retângulo e  $h$  representa a altura do retângulo. Nessa situação,  $A_{\text{retângulo}}$  representa a função  $f(b, h)$  na qual  $b, h$  são as suas variáveis independentes. Destacamos, a partir disso, que as variáveis, do exemplo anterior, representam justamente a área de um retângulo. Então, ao restringirmos os valores dessas variáveis, restringimos o seu próprio domínio, isto é, o domínio de uma função de duas variáveis reais é limitado por uma área plana segundo as variáveis do problema ou situação.

Analogamente, Chen (2008) argumenta que funções multivariáveis são definidas da seguinte forma: Seja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m: x \mapsto f(x)$  [1], onde o domínio  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é um conjunto no espaço euclidiano  $n$ -dimensional e o contradomínio  $\mathbb{R}^m$  é um espaço euclidiano  $m$ -dimensional tal que  $n, m \in \mathbb{N}$ . Para cada  $x \in A$ , podemos escrever:  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , onde  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ . Em outras palavras, pensamos na função [1] como uma função de  $n$  variáveis reais  $x_1, \dots, x_n$ . Se  $n > 1$ , então dizemos que a função [1] é uma função de várias variáveis reais. Assim, podemos escrever  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ , onde  $f_1(x), \dots, f_m(x) \in \mathbb{R}$ . Logo, dizemos que a função [1] é uma função vetorial. Se  $m = 1$ , então dizemos que a função [1] é uma função real. Chen (2008) ainda exemplifica que nos casos cujos valores de  $n$  e  $m$  assumem, respectivamente, os valores 2 e 1, dizemos, então, que a função é uma função real de duas variáveis reais.

Por conseguinte, Anton (2000, p. 315) argumenta: “Exceto nos casos mais simples, os gráficos de funções de duas variáveis podem ser difíceis de visualizar sem a ajuda de um recurso gráfico computacional”. De fato, Bulla e Rosa (2017) comentam e discutem sobre como a percepção do usuário pode potencializar/transformar o estudo de funções de duas variáveis reais em um ambiente de RA, produzindo conhecimento matemático. Nesse viés, pretendemos, em conjunto com os

participantes do minicurso, nos debruçar sobre a resolução de Atividades-Matemáticas-com-Realidade-Aumentada, conduzindo-os e instigando-os a modificar e transformar suas próprias percepções, segundo Bulla e Rosa (2017), em relação às superfícies geradas por funções de duas variáveis reais, tomadas em um ambiente de RA.

Portanto, entendemos ser exequível uma proposta de curso que proporcione por meio da RA uma forma plausível de visualização e manipulação gráfica de funções de duas variáveis reais, de forma a se estender a produção desse conhecimento a todo tipo de função. Em termos de domínio, imagem, produção gráfica etc. Cabe, então, salientarmos como procederemos em nossa proposta didática.

### **Metodologia**

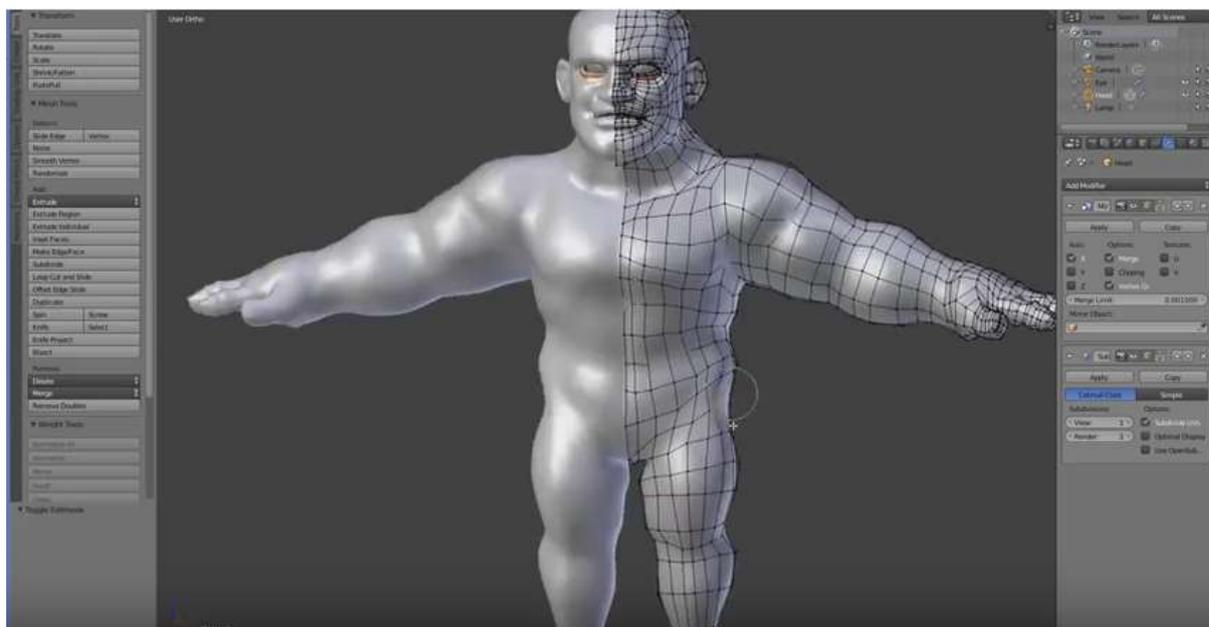
O minicurso será dividido em três momentos distintos. No primeiro momento, os participantes serão apresentados aos *softwares* Blender e AndAR. Explicaremos as principais características dos *softwares*, as formas de manuseio e construção presentes nesses bem como suas ligações com a RA.

Primeiramente, apresentaremos o programa Blender, comentando que o mesmo está disponível gratuitamente para uso e, inclusive, para submissão de códigos fonte, isto é, o programa possui um código aberto (*open source*) o qual permite seus usuários submeter algoritmos de programação para aprimoramento do seu sistema principal. Comentaremos, de mesmo modo, que o programa Blender é um recurso computacional capaz de modelar e animar objetos virtuais tridimensionais em um ambiente de realidade virtual. Para ilustrarmos essa situação, apresentaremos um breve vídeo relacionado à modelagem virtual de um avatar<sup>7</sup> com o programa Blender.

---

<sup>7</sup> s. m., [Informática] ícone gráfico escolhido por um usuário para o representar em determinados jogos e comunidades virtuais; (Dicionário Universal de Língua Portuguesa).

**Figura 1** – Construção de um avatar com o programa Blender



**Fonte:** Vídeo reproduzido e disponível no site YouTube<sup>8</sup>

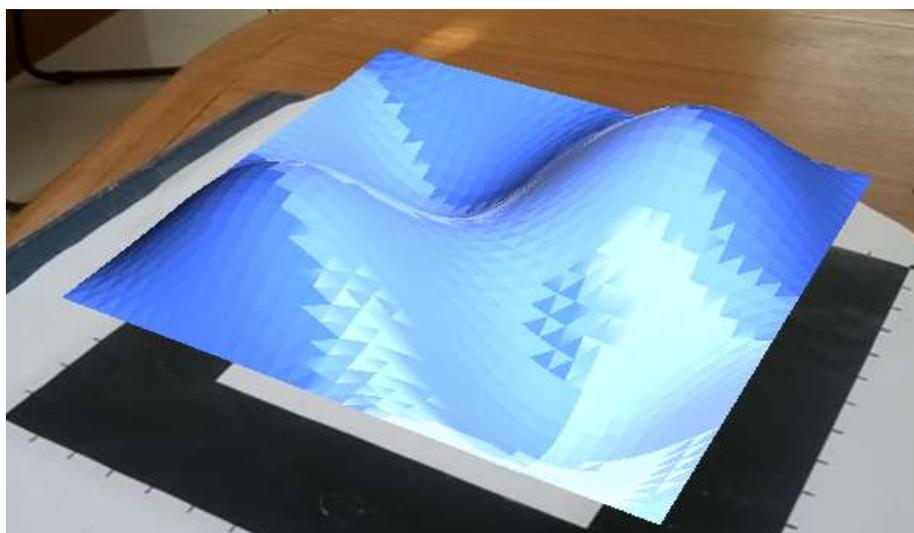
Salientaremos que o programa Blender é um bom recurso para o desenvolvimento de um ambiente de RA, pois os objetos virtuais visualizados nesse ambiente são facilmente construídos no programa Blender.

Na sequência, apresentaremos o aplicativo AndAR, um *software* também disponível gratuitamente para uso e para submissão de códigos fonte (DOMHAN, 2010). Enfatizaremos a principal funcionalidade desse aplicativo, relacionada a sua capacidade de importar os objetos virtuais, construídos, por exemplo, no programa Blender, e projetá-los, com suporte de um dispositivo tecnológico (como um *smartphone*, nesse caso), no ambiente mundano, capturado pela própria câmera do dispositivo tecnológico. Assim, o aplicativo AndAR produz um ambiente de RA na tela de visualização do mesmo dispositivo tecnológico conforme o ângulo de visualização da câmera desse aparelho é apontado para o centro do *marker* (ver apêndice A), uma espécie de marcador (impresso em uma folha de papel) sobre o qual o objeto virtual será projetado.

---

<sup>8</sup> Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VHt9689gTOA>. Acesso em: 14 jun. 2017.

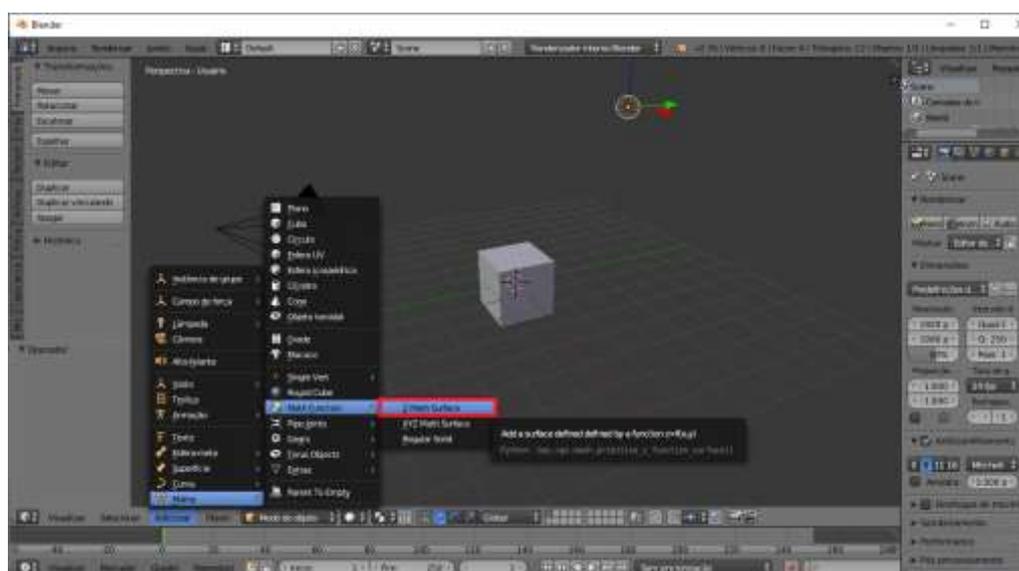
**Figura 2** – Imagem capturada da tela de um *smartphone* ao projetar um objeto virtual, a partir da câmera do próprio dispositivo, em um ambiente mundano.



**Fonte:** Bulla e Rosa (2017, p. 312)

No segundo momento, discutiremos com os participantes do minicurso a cerca dos mecanismos do programa Blender para construção de objetos virtuais tridimensionais. Em especial, abordaremos um recurso desse programa para construção de superfícies geradas por funções de duas variáveis reais, chamado de *Z Math Function*.

**Figura 3** – Caminho para acessar o recurso *Z Math Function* do programa Blender



**Fonte:** Bulla e Rosa (2017, p. 307).

A partir desse recurso, discutiremos com os participantes sobre como o domínio de funções de duas variáveis reais pode influenciar sob as superfícies geradas pelas leis de formação dessas mesmas funções. Desejamos que os participantes reflitam a

respeito disso, pois nossa intenção é, no terceiro momento do minicurso, que os mesmos modelem, virtualmente, objetos virtuais tridimensionais com o recurso *Z Math Function* do programa Blender. Através desse recurso, os participantes poderão ajustar o domínio de suas funções de duas variáveis reais, analisando o modo de como uma superfície se comporta em relação ao seu domínio.

Ainda, no segundo momento, esclareceremos aos participantes como podemos exportar o objeto virtual criado com o programa Blender para o aplicativo AndAR, possibilitando, assim, sua visualização em um ambiente de RA.

No terceiro e último momento, aplicaremos uma atividade com os participantes na qual os mesmos deverão formar grupos de até quatro integrantes. Cabe salientar que os participantes deverão dispor de *smartphones* para realização da atividade. Cada grupo será responsável pela construção de um objeto virtual com o recurso *Z Math Function* do programa Blender. Cada objeto virtual, criado pelos grupos de participantes, será exportado para o aplicativo AndAR. A partir disso, cada grupo será encarregado de investigar e descobrir as possíveis funções de duas variáveis reais que os demais grupos de participantes utilizaram para criar seus próprios objetos virtuais. Ou seja, os participantes utilizarão o ambiente de RA para “decifrar” as leis de formação das funções de duas variáveis reais, utilizadas para construir a superfície, visualizada no próprio ambiente de RA, pelos outros grupos de participantes. Incentivaremos e orientaremos os participantes a discutir sobre as construções de cada grupo, buscando analisar as funções de duas variáveis reais utilizadas em cada situação bem como os domínios adotados para construção das superfícies.

Por fim, esperamos proporcionar aos participantes uma experiência com tecnologias de RA a qual contribua para uma autorreflexão sobre suas próprias práticas pedagógicas em sala de aula, incentivando-os a repensar nos métodos e nos recursos para o ensino de funções em geral. Entendemos que o uso dos recursos tecnológicos de nosso minicurso sejam relevantes para potencializar/transformar o estudo de funções.

### **Referências**

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha, 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v.2

AVATAR. In: DICIONÁRIO Universal da Língua Portuguesa. Lisboa: Priberam Informática, 1999. Disponível em: <http://www.priberam.pt/dlpo>. Acesso em: 08 jun. 2017.

BARCELOS, R.; SANT'ANNA, A. M.; RODRIGUES, E. S.; JÚNIOR, H. J.; BRAGA, V. C.; NUNES, A. O. N.; VELASCO, E. M.; ARAÚJO, C. B. L. de. Softwares utilizados em desenvolvimento de jogos educacionais: diferenças entre o Blender X Flash. **Revista Eletrônica Perspectivas da Ciência e Tecnologia-ISSN: 1984-5693**, v. 1, n. 1, p. 89-97, 2009.

BICUDO, M. A. V. A formação do professor: um olhar fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Formação de Professores?** Bauru: EDUSC, 2003.

BULLA, F. D.; ROSA, M. O Design de Tarefas-Matemáticas-com-Realidade-Aumentada: uma autorreflexão sobre o processo. **Acta Scientiae**, v. 19, n. 2, 2017.

CHEN, W. W. L. **Análise Multivariável e Vetorial**. Universidade Macquarie, Sydney – Nova Gales do Sul, 2008. Disponível em: <https://rutherglen.science.mq.edu.au/~maths/Chen-notes/lnmvafolder/lnmva.html>. Acesso em: 11 de mar. 2017.

DOMHAN, T. Arquivo Google Code. **AndAR – Android Augmented Reality**, mar. 2010. Disponível em: <https://code.google.com/archive/p/andar/>. Acesso em: 17 mar. 2017.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**. Papyrus editora, 2007.

KIRNER, C.; SISCOOTTO, R. **Realidade Virtual e Aumentada: Conceitos, Projetos e Aplicações**. Livro do Pré-Simpósio; IX Symposium on Virtual and Augmented Reality, Petrópolis – RJ, 2007.

KIRNER, C. Prototipagem Rápida de Aplicações Interativas de Realidade Aumentada. **Tendências e Técnicas em Realidade Virtual e Aumentada**. SBC, Porto Alegre, v. 1, n. 1, p. 29-54, 2011. Disponível em: <http://comissoes.sbc.org.br/ce-rv/livro2011.pdf#page=29>. Acesso em: 21 mar. 2017.

ROSA, M. Cyberformação com Professores de Matemática: interconexões com experiências estéticas na cultura digital. In.: ROSA, M.; BAIRRAL, M. A.; AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância: pesquisas contemporâneas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015a, p.57-93.

ROSA, M. Inovação na Prática Docente: Iniciando pela concepção da Cyberformação com professores de Matemática – A Formação-Docente-com-Tecnologias-Digitais. In.: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2015, Porto Alegre – **Anais eletrônicos...** Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2015b. Disponível em: <<http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/anais/anais-do-egem/assets/2015/73605875068P.pdf>>. Acesso em: 17 fev. 2017.

## APÊNDICE A

### *Marker com borda centimetrada*

