# INDICAÇÕES DE ABORDAGENS PARA O ENSINO DE INTEGRAL A PARTIR DA OBRA ARITHMETICA INFINITORUM DE JOHN WALLIS

**Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes**[1]
**Iran Abreu Mendes**[2]

**História da Matemática, História da Educação Matemática e Cultura**

**Resumo**:
Neste artigo, apresentamos algumas das ideias e métodos emergentes da obra Arithmetica Infinitorum de John Wallis datada de 1656, com a finalidade de apontar seu potencial pedagógico, que possa subsidiar o ensino de conceitos matemáticos numa perspectiva de melhorar o entendimento sobre as ideias matemáticas nos estudantes de Cursos de Formação Inicial de Professores de Matemática. Ao levar uma obra histórica em Matemática para discussão em sala de aula, ganhamos a possibilidade de enriquecer as aulas, discutindo com os estudantes aspectos sociais e culturais que sobressaíram desse estudo, estabelecendo assim uma integralização da Matemática aos contextos social e cultural de um período histórico. Apoiados neste pensamento, nós exibimos nossas sugestões e encaminhamentos didáticos para o ensino de Integrais a partir do nosso exame desta obra. Nesta dinâmica, os futuros educadores matemáticos, possivelmente, desenvolverão um espírito investigador em conteúdos relacionados ao ensino e aprendizagem de Matemática. Este artigo originou-se de nossa tese de doutorado que teve como objetivo examinar de que forma as ideias de John Wallis, emergentes na obra Arithmetica Infinitorum, datada de 1656, apresentou inovações que podem contribuir para o encaminhamento conceitual e didático de noções básicas da componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral, no curso de Licenciatura em Matemática. Para esta tese, realizamos um trabalho que partiu de nossa elaboração de uma versão para o português da tradução em língua inglesa, The Arithmetic of Infinitesimals, de Jaqueline Stedall datada de 2004, recorrendo, em algumas ocasiões, ao original em latim.

**Palavras Chaves**: Ensino de Integrais. História da Matemática no ensino. Formação de professores de Matemática.

## 1. Introdução

Atualmente nos cursos de Licenciatura em Matemática, os alunos são formados para ter conhecimento de uma Matemática cristalizada, no que se refere à componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral. O conteúdo desta componente curricular é apresentado aos alunos nos primeiros semestres do curso, com uma abordagem clássica e universal, voltado para a parte algorítmica e com o objetivo de ensinar derivadas e integrais, visando simplesmente às aplicações. E a prática pedagógica dominante no ensino da Matemática acadêmica é fundada na

[1]Doutora. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. gabriela@ccet.ufrn.br
[2]Doutor. Universidade Federal do Pará. iamendes1@gmail.com

valorização das estruturas sobre a natureza dos objetos que as compõe (DIUEUDONNÉ, 1990).

Essa forma de ensinar Matemática aos futuros professores, pouco atingia um propósito que julgamos ser de extrema importância à formação de um educador matemático, que é a de compreender o desenvolvimento de um conceito matemático em aspectos mais amplos, tais como os problemas históricos que desencadearam o conceito matemático, o labor dos matemáticos que se debruçaram sobre esses problemas e as articulações entre ciência e o contexto sociocultural em uma determinada época.

Nessa perspectiva, vemos o apoio didático da história da Matemática em sala de aula como suporte condutor que contribui no fortalecimento de uma aprendizagem mais significativa. Um caminho que contribua para uma melhor compreensão de tópicos da graduação em Matemática tem como possibilidade uma abordagem introduzida por redescobertas de informações históricas da Matemática. Nesse sentido, Mendes (2001) assegura que

> É com base nessas situações encontradas no conteúdo histórico que podemos favorecer a formalização dos conceitos matemáticos pelo aluno, em razão das informações históricas interpretadas apresentarem as estruturas cognitivas dos mesmos incorporadas à formalização dos conceitos matemáticos, pois quando as informações históricas são interpretadas, elas incorporam à estrutura cognitiva dos alunos, conduzindo-os a um processo de elaboração mental que favoreça a abstração dos conceitos matemáticos estudados. (MENDES, 2001, p. 12)

Perceber como os matemáticos produziram sua Matemática estabelece um diálogo entre o conhecimento a ser aprendido e a ideias que levaram a criação de tais conhecimentos. Nesse movimento apontamos a oportunidade do aluno deixar de ser um receptor passivo e se tornar um agente ativo, adicionando suas reflexões e, assim, construindo seu próprio conjunto de ideias que contribuirão para um melhor conhecimento e compreensão da Matemática e os seus processos de criação. Assim, desviamos do uso corriqueiro e inadequado da história da Matemática, nas componentes curriculares que tendem a focar os aspectos bibliográficos de alguns matemáticos. Todavia, normalmente não lhes era apresentado o devido aprofundamento epistemológico sobre os conceitos, o que caracteriza segundo Fossa (2001) o uso ornamental da História da Matemática.

Buscamos na história da Matemática aspectos relacionados à criação do Cálculo no século XVII. Esse estudo nos fez ter acesso a vários problemas que foram tomados, historicamente, como sendo os que deram origem às ideias que fizeram com que o Cálculo fosse criado. Entre esses problemas se encontrava a quadratura do círculo. Essa foi a temática central tratada por John Wallis em sua obra A*rithmetica Infinitorum* de 1656, onde ele consegue uma representação por produto infinito para $\frac{4}{\pi}=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times11\times11\times\ldots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times12\times\ldots}$.

Muito mais foi conseguido com essa obra, as técnicas e o método desenvolvido por ele foi sem dúvida uma importante contribuição para a Matemática. Wallis mostrou como problemas clássicos de quadratura podiam ser manipulados aritmeticamente e algebricamente e ao fazer isso ele deu um impulso a mudança do pensamento geométrico para o algébrico na segunda metade do século XVII,

> A mudança de geometria para aritmética estava no coração do método de Wallis: ele viu que pela soma, não apenas de progressões aritméticas, mas por sequência de quadrados, cubos e potências mais altas, que poderia determinar áreas (ou volumes) limitadas por uma variedade de curvas. Assim, a geometria dos indivisíveis de Cavalieri se transforma na aritmética de somas infinitas, daí o título: *Arithmetica Infinitorum*(STEDALL, 2001, p. 3)

As ideias dos indivisíveis de Cavalieri podem ser citadas como as que mais influenciaram a produção deste trabalho de Wallis (DENNIS; CONFREY, 2000, p. 17), mas usando técnicas e métodos, baseados em termos analíticos, ele conseguiu a quadratura e cubatura de certos tipos de curvas e superfícies. O que, para época, era extremamente original. Stedall (2001) assegura que Wallis foi mais inovador em seus métodos, especialmente em sua tentativa de lidar com processos infinitos e quantidades infinitesimais.

Wallis utilizou múltiplas representações em sua obra, tais como: tabelas numéricas, álgebra e geometria. Estas representações são fontes de importantes elementos a serem considerados na ampla formação de um licenciando em Matemática. As tabelas foram utilizadas, principalmente, para expressar a síntese de seus resultados, em algumas delas havia lacunas, que Wallis procurou preencher por interpolação nas proposições posteriores. Seu tratamento indutivo, associado a sua intuição Matemática frequentemente correta, desencadeou muitos resultados matemáticos interessantes. Sua obra é de grande importância para o desenvolvimento daquilo que hoje conhecemos por Cálculo Diferencial e Integral, influenciando, de maneira significativa, expoentes da física e da Matemática, incluindo Isaac Newton e Leonhard Euler.

Ainda a respeito de nossa investigação contemplar o estudo de uma obra histórica vetorizada para a abordagem de temas de Matemática no ensino de alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática, fundamentamo-nos em Mendes (2006) que aponta a investigação em história da Matemática como um *agente de cognição* na Educação Matemática. O termo *agente de cognição* é relacionado com criatividade por Mendes (2015a) dando o sentido de oferecer ao estudante, utilizando a história da Matemática mediada pelo professor, uma oportunidade de se desafiarem a decidirem tomar parte em um processo de criatividade Matemática como parte de sua aprendizagem. Para nosso trabalho, a citada mediação dada pelo professor foi enxergada como parte da correlação entre os termos criatividade e cognição Matemática dada no âmbito da pesquisa em história da Matemática que apresenta a

> perspectiva que a cognição Matemática se concretiza quando identificamos a presença dessa criatividade nas matemáticas das obras históricas investigadas e no modo como reorientamos as informações extraídas dessas investigações, na elaboração de transposições didáticas a serem propostas no ensino de Matemática para estudantes da Educação Básica ou mesmo na formação de professores de Matemática. (MENDES, 2015a, p. 186)

Seguindo as ponderações de Mendes (2015b), buscamos no exercício de investigação Matemática de John Wallis, apontado em sua obra histórica *Arithmetica Infinitorum*, elementos que possam ser levados para sala de aula, com o intuito de alcançar uma prática desafiadora pelos alunos, de forma que cada um deles tenha um aumento de seu domínio dos conteúdos abordados nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral.

## 2. Indicações de abordagens para o ensino de integral

Ao examinarmos a obra *Arithmetica Infinitorum,* identificamos a oportunidade de uma abordagem de tópicos do Cálculo Diferencial e Integral desencadeados pelas ideias de Wallis. Podemos colocar como exercícios desafiadores para o estudante as lacunas deixadas em seu obra, por exemplo. Deste modo, estamos contribuindo para uma melhor aprendizagem dos conteúdos e para o estabelecimento de um posicionamento investigativo por parte dos estudantes. Tendo isso em vista, nossa proposta inclui apresentar algumas ideias de John

Wallis, expressas em sua obra *Arithmetica Infinitorum,* que fazem emergir relações entre áreas e integral de Riemann.

Para uma abordagem didático-pedagógica em sala de aula do exame de um exercício de investigação Matemática histórica materializada em um texto, o professor anuncia para os estudantes o tema que será alvo da investigação matemática, no nosso caso, integrais.

Dados editoriais do texto devem ser informados:

Quadro 1 – Dados editoriais da obra.

| |
|---|
| Título do Texto: *Arithmetica Infinitorum* |
| Autor: John Wallis |
| Ano de publicação: 1656 |
| Local de publicação: Oxford Inglaterra |

Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida, para o exame do exercício criativo histórico, deve ser feito um estudo biográfico do autor, sobre o contexto social e cultural do período em que o autor viveu e sobre o tema central abordado em seu texto. Para isso, o professor deve instruir os estudantes fazerem suas próprias pesquisas indicando palavras centralizadoras da pesquisa, que possam ser utilizadas em plataformas eletrônicas de busca em uma biblioteca ou em um site de busca como o *Google*. Algumas palavras centralizadoras são apresentadas a seguir

Quadro 2 – Palavras centralizadoras do estudo

| | | |
|---|---|---|
| John Wallis | Arithmetica Infinitorum | Matemáticos século XVII |
| Quadratura | Inglaterra século XVII | História Matemática século XVII |
| Indivisíveis | Infinitesimal | Integrais século XVII |

Fonte: Elaborado pela autora.

Decorrente dessa pesquisa, os estudantes podem trazer temas que eles julgam relacionados com o tema proposto para a investigação. O professor deve dar a oportunidade desses estudantes se manifestarem, uma consequência importante dessa atitude são que os estudantes se sentem valorizados e os conhecimentos do professor podem ser ampliados.

Os estudantes podem fazer essa pesquisa em ambiente fora de sala de aula e trazer seus resultados para uma discussão em conjunto com os colegas e professor. Nessa dinâmica, questões podem ser levantadas e dúvidas podem ser esclarecidas. Essa atividade visa à construção de um panorama amplo do período histórico, incluindo o matemático central do estudo, a Matemática da época e demais matemáticos que estudaram o temas relacionados ao tópico de integrais. Além de ressaltar suas relações. É indicado o uso de um laboratório de informática com computadores conectados *internet,* essa atividade de pesquisa pode ser feita em conjunto, professor e estudantes. A organização das informações obtidas deve ser feita de modo, que posteriormente, uma discussão possa acontecer. Como sugestão, nós indicamos a elaboração de uma lista de termos emergentes das pesquisas, pois assim o estudante pode desenvolver o seu discurso oral durante as os debates. Como atividade de sistematização e registro escrito, cada estudante é responsável por elaborar um texto escrito, de forma que haja, também, um desenvolvimento da escrita.

Alguns estudantes podem apresentar ao grupo sua sistematização, mas em uma primeira abordagem com os alunos, o professor pode desempenhar essa tarefa e as demais fica a cargo de um estudante. Esse momento é útil para o apontamento das relações emergentes nas discussões entre domínio, campo e individuo. Esse é um momento riquíssimo, pode-se constatar se as questões levantadas inicialmente foram não respondidas, e novas questões podem emergir. Qualquer um dos casos configura mais uma oportunidade do exercício investigativo por parte dos estudantes.

É chegado o momento dos estudantes conhecerem o texto original. O professor leva para a sala de aula o texto original para observação dos alunos e posterior levantamento de questões. No caso do nosso exemplo, a observação do *Arithmetica Infinitorum* pode gerar os seguintes comentários e questões semelhantes às seguintes:

Quadro 3 - Questões levantadas após a observação da obra.

| Observação ou comentário | Questões |
|---|---|
| A tipografia parece ser antiga | O texto se apresenta legível ou não? |
| O texto está em latim. Eu não sei ler latim. | Por que o texto está escrito em latim? |
| O texto não é subdividido em capítulos, como ocorre na maioria dos textos atuais. | Isso dificulta a localização de um resultado em particular? |

| | |
|---|---|
| Nas demonstrações o autor não usa uma linguagem fortemente simbólica. | Essa é uma característica do autor ou da época? |
| Existem muitas tabelas. | Qual a função dessas tabelas no texto? |
| Existem muitas expressões aritméticas, progressões aritméticas. | A soma de uma progressão aritmética era conhecida naquela época? |
| Tem muitas figuras. | Qual a funcionalidade dessas figuras no texto? |
| Há figuras de curvas como parábolas e círculos. | Por que não aparecem figuras das outras cônicas? Hipérbole e elipse. |
| Para o autor tudo é proposição. | Existem diferenças entre o significado de lema, teorema, corolário e conjectura em um texto matemático? Qual a função dos exemplos? |
| Algumas figuras aparecem fatiadas por linhas. | Por que ele fez isso em várias figuras planas? |

Fonte: Elaborado pela autora.

Devemos ressaltar que prática dessa atividade pode ajudar a clarificar, ainda mais, as relações entre domínio, campo e indivíduo, além de poder apontar a epistemologia da matemática e os métodos de investigação do autor. Algumas dessas questões já podem ter sido contempladas com uma resposta satisfatória na etapa anterior.

O professor pode anunciar a parte do texto que será examinada. No nosso caso, a tabela da proposição 44 da obra original é o alvo central da nossa atividade investigatória, perifericamente aparecem as proposições que deram origem a essa tabela. Registramos que os cálculos, que apresentamos a seguir, não aparecem na obra de John Wallis, é fruto do trabalho da autora, enquanto buscava a compreensão dos resultados que eram traduzidos para o português.

Apoiando-se em seu método de indução, Wallis estabelece na proposição 44 de sua obra, a tabela 1 que sintetiza e exprime suas ideias acerca da razão

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \ldots + n^k}{\underbrace{n^k + n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}_{n+1 \ vezes}}, \qquad \text{(R)}$$

onde $k$ é um número inteiro positivo.

Tabela 1: Razões em termos dos valores de k

| $k$ | Razão | Potência da Série |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{1}$ | Iguais |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | Primeira potência |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | Segunda potência |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | Terceira potência |
| 4 | $\frac{1}{5}$ | Quarta potência |
| 5 | $\frac{1}{6}$ | Quinta potência |
| 6 | $\frac{1}{7}$ | Sexta potência |
| 7 | $\frac{1}{8}$ | Sétima potência |
| 8 | $\frac{1}{9}$ | Oitava potência |
| 9 | $\frac{1}{10}$ | Nona potência |
| 10 | $\frac{1}{11}$ | Décima potência |

Fonte:Elaborado pela autora a partir da tabela da proposição 44 da obra Arithmetica Infinitorum (1656) de John Wallis.

Nossa intenção, primeira, é indicar uma abordagem utilizando as ideias de John Wallis presentes na tabela anterior. Para tal, correlacionamos os resultados obtidos por ele com aqueles equivalentes na Matemática atual, usando tanto recursos geométricos quanto aritméticos, explicitando o potencial pedagógico deste tratamento. A ideia é examinar a razão da soma dos comprimentos das linhas de uma figura plana pela soma dos comprimentos das linhas equivalentes do paralelogramo circunscrito a essa figura.

Como exemplo de exploração da tabela 1, apresentaremos a discussão dos resultados apenas para uma linha desta tabela, fazendo uma subdivisão em etapas, cada etapa corresponde ao tratamento da figura plana determinada por uma curva específica. Essa atividade é um momento de observação, experimentação e exploração e devem ser as discussões em sala de aula para mais de uma linha da tabela 1.

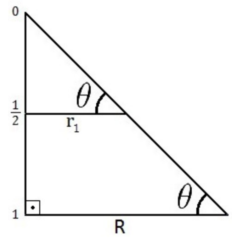
**<u>Linha 2 da Tabela: Primeira Potência</u>**

| k | Razão | Potência da Série |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | Primeira potência |

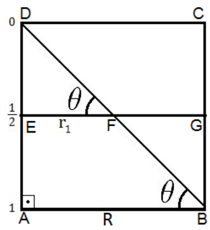
Para k=1, a razão entre as áreas do retângulo e do triângulo inscrito é $\frac{1}{2}$, como na figura a seguir. Esse resultado é observado na segunda linha da tabela e é proveniente das proposições 1, 2 e 3 da obra *Arithmetica Infinitorum.*

**- Primeira etapa:**

Consideremos um triângulo retângulo com altura igual a 1, como na figura a seguir:




Vamos, assim como Wallis, investigar a razão entre a área do triângulo e do retângulo como na figura a seguir. Seja E o ponto médio da altura AD, como na figura:




Assim, temos que:

$tg\theta = \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{2}}{r_1}$. Logo, $r_1 = \frac{1}{2}R$.

Agora, vamos investigar a soma das medidas dos segmentos da base AB, do segmento EF, e considerar D o segmento degenerado de medida zero:

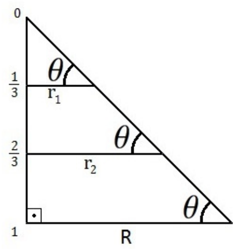
$0 + r_1 + R = 0 + \frac{1}{2}R + R$.

Fazendo a razão da soma anterior pela somada medida da base, três vezes, temos $\frac{0+\frac{1}{2}R+R}{R+R+R} = \frac{0+\frac{1}{2}+1}{1+1+1} = \frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}$.

Que parte do que Wallis indicou na proposição 1 de sua obra.

**- Segunda etapa:**

Consideremos agora a altura dividida em três partes iguais, como na figura a seguir:




Podemos observar que

$tg\theta = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\frac{1}{3}}{r_1} = \dfrac{\frac{2}{3}}{r_2}$. Daí, temos que $r_1 = \dfrac{1}{3}R$ e $r_2 = \dfrac{2}{3}R$.

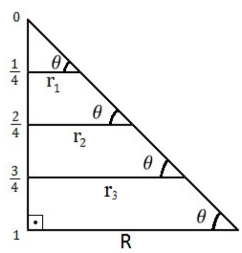
E, consequentemente, $0 + r_1 + r_2 + R = 0 + \dfrac{1}{3}R + \dfrac{2}{3}R + R$.

Fazendo a razão da soma anterior pela soma $R + R + R + R$, temos:

$$\frac{0 + \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}R + R}{R + R + R + R} = \frac{0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1}{1 + 1 + 1 + 1} = \frac{0 + 1 + 2 + 3}{3 + 3 + 3 + 3} = \frac{1}{2}.$$

**- Terceira etapa:**

Seguindo com esse raciocínio, vamos dividir a altura em quatro partes iguais, como na figura a seguir:




De modo que, $tg\theta = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\frac{1}{4}}{r_1} = \dfrac{\frac{2}{4}}{r_2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{r_3}$. Assim, $r_1 = \dfrac{1}{4}R$, $r_2 = \dfrac{2}{4}R$ e $r_3 = \dfrac{3}{4}R$.

Consequentemente escrevemos a soma:

$$0 + r_1 + r_2 + r_3 + R = 0 + \frac{1}{4}R + \frac{2}{4}R + \frac{3}{4}R + R.$$

Agora, fazendo a razão da soma anterior pela soma $R + R + R + R + R$, temos

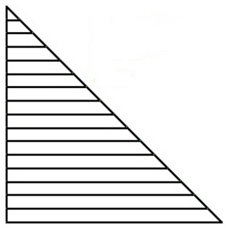
$$\frac{0+\frac{1}{4}R+\frac{2}{4}R+\frac{3}{4}R+R}{R+R+R+R+R}=\frac{0+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+1}{1+1+1+1+1}=\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4}=\frac{1}{2}.$$

Que é, novamente, o resultado colocado por Wallis na proposição 1 de sua obra.

Quando os estudantes perceberem a relação entre as etapas realizadas, pode-se começar uma discussão que vai para a direção de uma generalização. E assim,

**- N-ésima etapa:**

Seguindo esse raciocínio, dividindo a altura em n partes iguais, como ilustra a figura a seguir,



chegamos a

$$\frac{0+\frac{1}{n}R+\frac{2}{n}R+\frac{3}{n}R+\ldots+\frac{n-1}{n}R+\frac{n}{n}R}{R+R+R+R+R}=\frac{0+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}+1}{1+1+1+1+1}$$
$$=\frac{0+1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n}{\underbrace{n+n+n+n+n+n+\ldots+n}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{2}$$

A ideia que emerge da noção, estabelecida por Wallis, de subdividir a altura do triângulo em segmentos de mesmo comprimento, nos remete a ideia de partição de um segmento e está correlacionada a um processo infinito. Neste caso, temos uma situação muito particular de partição, além das extremidades dos subintervalos serem números racionais o comprimento de todos os subintervalos é igual a $\frac{1}{n}$. Podemos levantar algumas questões desafiadoras, tais como: O intervalo tomado originalmente para ser particionado só pode ser $[0,1]$? As extremidades do intervalo a ser particionado devem, obrigatoriamente, ser racionais? O comprimento dos subintervalos deve ser igual a um número racional?

Também podemos explorar neste contexto noções de sequencias, séries infinitas e somas parciais. O resultado da proposição 1 da obra de Wallis, neste caso, pode ser abordado com o uso da fórmula para a soma dos n primeiros números naturais,

$$0+1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n=\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Isso nos permite calcular o limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0+1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n}{\underbrace{n+n+n+n+n+\ldots+n}_{n+1\ vezes}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\,(n+1)}{2}}{(n+1)n}=\frac{1}{2}.$$

Encontrando o resultado proposto por Wallis.

Usando a sua indução, Wallis mostra que para k=2, a razão entre a área abaixo da parábola inscrita no retângulo e a área do retângulo é $\frac{1}{3}$. Para k=3, a razão das áreas do retângulo e da região abaixo da cúbica inscrita no retângulo ABCD é $\frac{1}{4}$. Seguindo, sue raciocínio, Wallis conclui o qeu podemos escrever em notação atual na seguinte forma:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+4^k+\ldots+n^k}{\underbrace{n^k+n^k+n^k+n^k+n^k+\ldots+n^k}_{n+1\ vezes}}=\frac{1}{k+1}$$

O exercício de experimentação das etapas anteriores se mostra relevante para uma primeira discussão sobre partição de um intervalo, assunto importante no trato da integral de Riemann. O estudante ao buscar inter-relacionar os resultados obtidos, nas etapas anteriores, está promovendo o processo de síntese.

Nessa atividade há, também, uma mudança de uma representação geométrica para uma representação simbólica, isso se dá quando ao partir de uma figura geométrica plana determinada por uma curva se obtém o resultado anterior. Outro fato a ser notado é que o estudante percebe que o procedimento de subdivisão do segmento aplicado em cada etapa é o mesmo, isso pode ser importante no estudo da integral de Riemann, de modo que ele possa compreender que esse procedimento pode ocorrer para diferentes funções.

O processo infinito de subdivisão do segmento é um processo geométrico que se associa a um processo aritmético infinito que é as séries. Essa associação é uma janela para o estudo dos números reais, relacionando a sua representação geométrica na reta com sua representação decimal. A representação decimal pode ser associada a uma série geométrica, no caso dos racionais. Boas discussões a encaminhamentos didáticos podem ser proveniente dos resultados obtidos por Wallis pelo seu método de investigação.

Agora, vamos relacionar os resultados obtidos por Wallis, através do seu método, que foi a razão entre a área da figura delimitada pela a curva $y=x^k$ e o eixo x intervalo $[0, a]$ Na notação atual, com o uso das integrais, temos fórmulas equivalentes que exibiremos na tabela a seguir:

Tabela 2- Associação dos resultados de Wallis com integrais.

| k | Razão de Wallis | Integral |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{1}$ | $\int_0^a dx = a$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$ |
| 3 | $\frac{1}{4}$ | $\int_0^a x^3\,dx = \frac{a^4}{4}$ |
| 4 | $\frac{1}{5}$ | $\int_0^a x^4\,dx = \frac{a^5}{5}$ |
| 5 | $\frac{1}{6}$ | $\int_0^a x^5\,dx = \frac{a^6}{6}$ |
| 6 | $\frac{1}{7}$ | $\int_0^a x^6\,dx = \frac{a^7}{7}$ |
| 7 | $\frac{1}{8}$ | $\int_0^a x^7\,dx = \frac{a^8}{8}$ |
| 8 | $\frac{1}{9}$ | $\int_0^a x^8\,dx = \frac{a^9}{9}$ |

Fonte: Elaborado pela autora.

Estas atividades podem preceder a definição da integral de Riemann, e defendemos que os estudantes que passa por essa etapa podem compreender melhor os processos envolvidos nessa tarefa. Além de desenvolverem o espírito investigador que contribui no desenvolvimento da criatividade.

## 3. Conclusão

O exercício investigativo de John Wallis, na sua obra *Arithmetica Infinitorum*, nos subsidiou no preparo e desenvolvimento das atividades que propusemos neste artigo. A proposta pedagógica para o ensino de Integral, da componente curricular de Cálculo na Licenciatura de Matemática, que apresentamos possui a característica de que nas primeiras fases do desenvolvimento da teoria os estudantes são levados pelo professor, a se desafiarem abrindo espaço para possíveis conjecturas, que evidenciam um processo de criatividade Matemática como parte da aprendizagem como sugerido por Mendes (2015). Além disso, essa abordagem propicia ao aluno uma familiaridade com o assunto antes de um tratamento dentro de uma estrutura dedutiva, tratamento esse que é característico no modo tradicional de lidar com a definição de integral de Riemann. Viabilizando, assim, a possibilidade de superação das dificuldades encontradas para a compreensão desse conceito.

Nossa proposta de abordagem contribui para a formação de uma visão de que a Matemática é fruto de um processo construtivo e, que um conceito matemático, como por exemplo, de integral é resultado de uma criação humana, que mobilizou muitos matemáticos e demandou muito tempo para adquirir a forma atual que conhecemos e lidamos.

Dessa forma, destacamos que as práticas adotadas nessa abordagem levam o estudante a adquirir uma consciência investigatória, que pode extrapolar o conteúdo aqui tratado e atingir outros conteúdos de Cálculo, ou mesmo de outra componente curricular. Essa consciência é fator relevante no desenvolvimento da autonomia nos estudantes. Além disso, os estudantes compreendem que a produção de conhecimentos é encorajada pelo momento social e cultural de uma comunidade em uma determinada época, essa produção está intrinsecamente conectada à necessidade de respostas cognitivas, gerando novas formas de pensar que provocam a ampliação do conhecimento e criação de novos conhecimentos.

## 4. Referências Bibliográficas

DENNIS, D.; CONFREY, J. La creación de exponentes contínuos: um estúdio sobre los métodos y la epistemologia de John Wallis, **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v. 3, n. 1, p. 5-31, março 2000; Comité

Latinoamericano de Martemática Educativa, Organismo Internacional. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33503101>. Acesso em: 20 mar. 2016.

DIEUDONNÉ, J. **A formação da Matemática comtemporânea.** Tradução: J.H.von Hafe Perez. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1990.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre a educação Matemática**. Belém: EDUEPA, 2001. 181 p.

KATZ, V. J. **A History of Mathematic.** 3ª Edição. Boston: Pearson Education, 2009.

LOPES, G. L. O. **A criatividade matemática de John Mallis na obra A*rithmetica Infinitorum*:** contribuições para ensino de cálculo diferencial e integral na licenciatura em matemática. Tese (Doutorado em Educação) Centro de Educação-Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2017.

MENDES, I. A., FOSSA, J. A., VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006. 182p.

MENDES, I. A. **Cognição e criatividade na investigação em história da Matemática:** contribuições para a Educação Matemática. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 6, n. 1, p. 185-284, abril 2015a.

MENDES, I. A. **História da Matemática no Ensino**: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015b.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. S. **A formação Matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma Visão Crítica, desfazendo Mitos e Lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

STEDALL, J. A**. The Discory of Wonders: Reading Between the Lines of John Wallis´s Arithmetica infinitorum.Archive for History of Exact Sciences***,* New York, v. 56, Issue 1, p. 1-28, 2001. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs004070100040>. Acesso em: 20 mar. 2016.

STEDALL, J. A. **The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656. (Arithmetica Infinitorum: John Wallis 1656** - Transleted from Latim to English with an introduction). New York, Springer-Verlag, 2004.

WALLIS, J. **Arithmetica Infinitorum**. Oxford, 1656. Disponível em: <https://ia802709.us.archive.org/10/items/ArithmeticaInfinitorum/ArithmeticaInfinitorum.pdf>. Acesso em: 18 out. 2014.