



O USO DE ALGORITMOS DE SIMILARIDADE PARA CONCORDÂNCIA DAS ANÁLISES DE ERROS DE TAREFAS MATEMÁTICAS

Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos¹

José Carmino Gomes Junior²

Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação a Distância

O objetivo deste trabalho é promover reflexões acerca da aplicação do algoritmo de Levenshtein (1965), no auxílio da análise de Erros construída a partir de atividades desenvolvidas em sala de aula e conduzidas sob a luz da Resolução de Problemas. A pesquisa foi realizada em uma turma do 4º semestre do Bacharelado de Ciência da Computação e sua finalidade foi divulgar como o algoritmo pode ser útil, quando praticamos a metodologia da Análise de Erros, nesse caso, aliada no ensino e na aprendizagem de derivadas. A pesquisa é qualitativa e foi realizada através da observação participante, empírico-experimental e análise documental. A análise das respostas dos alunos permitiu conhecer as dificuldades matemáticas que os alunos encontram na resolução de problemas de derivadas bem como conhecer dificuldades em conhecimentos prévios. Os debates a respeito das resoluções construídas permitiram aos alunos construir novos conhecimentos matemáticos e reconstruir outros. Os resultados, ainda que prévios do algoritmo nos permite concluir que a similaridade de ideias, indica o caminho para o professor, neste caso, sobre o erro. A reflexão sobre os erros mostrou-nos lacunas em conceitos matemáticos anteriores, possibilitando, assim, corrigirmos algumas dessas falhas.

Palavras Chaves: Ensino de Matemática. Resolução de Problemas. Análise de Erros. Processamento de Linguagem Natural.

INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de Matemática há anos têm sido objeto de estudos e debates e, diante disso, propostas pedagógicas têm surgido na tentativa de minimizar as dificuldades encontradas nesses processos.

Trazemos para este trabalho resultados parciais de uma pesquisa em Processamento de Linguagem Natural (PLN), em especial o algoritmo de Levenshtein (1965) com o objetivo de verificar as semelhanças entre os pareceres de dois avaliadores. As pesquisas em Educação Matemática apontam a seriedade da Resolução de Problemas enquanto prática educativa no ensino de Matemática, em particular, o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Relata-se aqui um estudo realizado durante primeiro bimestre de 2017, em uma universidade particular na cidade de São Paulo, envolvendo 29 alunos do curso de Bacharelado em Ciência da Computação, no horário normal de aula utilizando a

¹Doutor. Universidade Nove de Julho. a.abraham@gmail.com

²Doutorando. Universidade Nove de Julho. prof.carmino@gmail.com

Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem para os conteúdos de derivadas.

Considerou-se neste trabalho, a análise dos erros matemáticos cometidos pelos alunos ao desenvolver a resolução os problemas como descrito por Bastos (2013). Para esta conjuntura, o erro não é entendido como procedimento de avaliação somativa, visto que não foi atribuída nenhuma nota ou conceito para as atividades realizadas. A análise deste erro constituiu-se em elemento de estudo para uma avaliação continuada, integrada ao processo de ensino-aprendizagem, em que busca compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos, criando, assim, subsídios para sanar suas dúvidas. Desta forma, as análises realizadas pelos avaliadores a respeito dos erros, poderão evidenciar algum nível de convergência de ideias entre os avaliadores (professores) que analisaram os erros, corroborando para reflexões mais refinadas sobre dificuldades e sobre erros matemáticos cometidos pelos alunos ao desenvolverem as atividades de derivadas realizadas em sala de aula através da resolução de problemas.

Dividimos este artigo em quatro seções. Na primeira e na segunda apresentamos, brevemente, nossa fundamentação teórica, qual sejam o ensino de Matemática através da resolução de problemas e a Análise de Erros e do Processamento de Linguagem Natural (PNL). Na seção seguinte, descrevemos a metodologia de pesquisa utilizada e na seção quatro, analisamos e discutimos os dados coletados e os testes. Encerramos com as considerações finais e as referências bibliográficas.

ABORDAR A MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Acompanhando orientações do cenário internacional da Educação Matemática nos anos 1980 quando o NCTM³ apresenta uma série de recomendações para melhoria da matemática escolar no documento intitulado “Uma Agenda para a Ação”. Uma dessas recomendações colocava a resolução de problemas como foco da matemática escolar dos anos 1980 (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Essa concepção sobre Resolução de Problemas refere-se a ensinar Matemática utilizando o problema como ponto de partida e um meio através do qual vai se ensinar Matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

³ National Council of Teacher of Mathematics

De acordo com Cai e Lester (2012, p. 148), “quando os pesquisadores utilizam o termo resolução de problema, eles estão se referindo a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais que podem melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos”.

Neste trabalho, consideramos a Resolução de Problemas como metodologia de Ensino-Aprendizagem, em que problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem. Assumimos que problema “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer” (ONUHCIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

ANÁLISE DE ERROS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O estudo de erros na aprendizagem da matemática tem sido de interesse permanente para diferentes pesquisadores e tem se caracterizado por diferentes abordagens e interesses muito diferentes.

Borasi (1985) considera que os erros podem ser analisados com dois objetivos basais: para eliminá-los ou para explorar suas potencialidades. Em qualquer um dos casos, estaríamos incidindo sobre o conteúdo técnico e matemático do erro, na natureza da matemática ou no processo de aprendizagem da própria disciplina. A literatura sobre o tema nos permite inferir que a manifestação do erro, não indica, necessariamente, a ausência completa de conhecimento.

A presença permanente de erros na construção e consolidação do conhecimento humano é uma questão complexa e delicada. O erro é indicativo de um conhecimento que tem alguma deficiência ou incompletude, como indicado por Bastos e Allevato (2011). Os autores completam dizendo que o erro é uma condição do que pode acontecer e um fato permanente no desenvolvimento do conhecimento científico.

No entanto, devemos ter em mente que, no ensino e aprendizagem da matemática, encontramos uma variedade de dificuldades que são potencialmente geradoras de erros, sem chegar a uma categorização abrangente, Bastos (2013) os agrupou nas seguintes categorias:

A Categoria Ω - Erros ligados a cálculos incorretos - Nessa categoria reunimos aqueles erros que ocorrem quando cada passo na realização do problema está correto ou responde à lógica interna do procedimento esperado, entretanto o resultado final não corresponde à solução desejada em virtude de erros de cálculo

apresentados na efetivação de operações básicas, ou causado pela transferência equivocada de símbolos e números envolvidos na situação.

A Categoria β – Erros ligados às deficiências na construção de conhecimento matemático prévio - Essa categoria de erros atende a elementos, registrados nas resoluções dos problemas, que manifestam aprendizagem incorreta ou incompleta de fatos, procedimentos, algoritmos e conceitos matemáticos trabalhados (ou não) em etapas anteriores da escolaridade, e que interferem na obtenção da solução do problema.

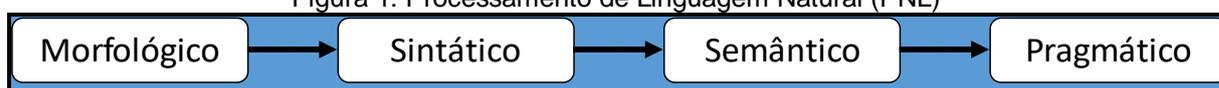
Assim, a Análise de Erros pode ser entendida como metodologia de ensino quando se propõem atividades de exploração e reflexão sobre os erros, originando a construção de conhecimentos; e como metodologia de pesquisa (CURY, 2007), com enfoques apontados pelos pesquisadores e pelas teorias em que se apóiam suas pesquisas.

Em qualquer uma dessas situações, podemos trabalhar o erro para atenuá-lo, para alcançar novos conhecimentos ou para promover novas investigações.

PROCESSAMENTO DE LINGUAGEM NATURAL (PLN)

O Processamento de Linguagem Natural (PLN) representado pela Figura 1, é em geral construído com base no conhecimento morfológico, sintático, semântico e pragmático. A morfologia é responsável pelo estudo da construção das palavras, com seus afixos, sufixos e radicais; sintática representa o estudo das relações formais entre orações e seus períodos; semântica é o processo de mapeamento de sentenças da linguagem objetivando a representação de seu significado e pôr fim a análise pragmática se refere ao processamento de como a linguagem é usada para comunicar.

Figura 1: Processamento de Linguagem Natural (PNL)



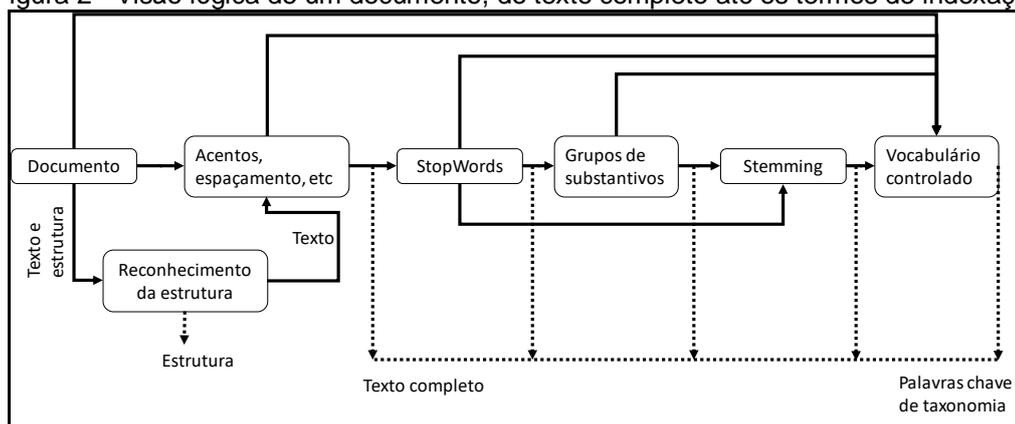
Fonte: Autor

O que leva ao termo texto como um dos meios de comunicação humana, presente em diferentes línguas, mídias e canais, o termo é muito abrangente, sendo então necessário definir uma unidade de texto para facilitar sua identificação e tratamento. A unidade de texto aqui adotada é definida como Artigo Científico (AC), a área responsável por criar reconhecedores de assunto automático é a de

Recuperação da Informação (RI), que usa técnicas para construção de ferramentas de busca, por exemplo, indexadores ranqueados.

Uma das representações adotadas pela área é a visão lógica do documento, representada pela Figura 22, onde o texto é visto na forma completa até o conjunto de termos a ele associados.

Figura 2 - Visão lógica de um documento, do texto completo até os termos de indexação



Fonte: Adaptado de Baeza-Yates; Ribeiro-Neto (2013)

A RI tem o seu cerne em prover aos usuários acesso eficiente e eficaz as informações de seu interesse. Tratando da representação, organização e acesso a informação de diferentes formatos.

METODOLOGIA E CONTEXTO DA PESQUISA

A metodologia empregada neste estudo foi de natureza qualitativa, e a coleta de dados por pesquisa participante, na qual se insere a observação-participante em sala de aula, como também por análise documental realizada pela análise das resoluções escritas dos problemas geradores propostos aos alunos.

Adotamos, nesta pesquisa, a perspectiva da pesquisa participante dada por Brandão (1987), considerando que todo trabalho de preparação, elaboração e implementação das atividades foi realizado pelo pesquisador. O pesquisador é parte integrante da produção de conhecimento, e suas ponderações, observações em campo, impressões e sentimentos farão parte da análise de dados.

Por se tratar de um estudo embrionário, o desenho deste projeto é experimental, que é uma atividade crítica uma vez que determina a validade da investigação, então o desenho deve ser consistente, isto é, deve ser definido para que a hipótese possa ser testada, portanto alguns passos devem ser tomados para projetar experimentos (JURISTO; MORENO, 2013). Como estratégia de pesquisa

visa a construção de conhecimentos usando uma rigorosa verificação e garantia de resultados, os quais são cientificamente comprovados (MARTINS; THEÓPHILO, 2009), tornando assim viável a avaliação de produtos de Software antes de sua inserção no mercado, o que mitiga possíveis riscos.

Nessa pesquisa, os documentos utilizados para obtenção de informações e construção dos dados são os manuscritos com os registros das resoluções dos problemas propostos aos alunos configurando-se assim, a utilização, também, de análise documental.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a elaboração das atividades, apoiamo-nos em Abdelmalack (2011) e nos livros Stewart (2013) e Flemming e Gonçalves (2004). Seleccionamos e adaptamos os problemas para que pudessem ser aplicados, seguindo a metodologia de ensino através da Resolução de Problemas. Dentre as atividades aplicadas à turma, seleccionamos duas com uma resposta de cada, e assim, apresentarmos as duas análises sobre o erro cometido pelo aluno (uma de cada avaliador) e em qual categoria (BASTOS, 2013) cada uma delas se encontra. Para tanto, apoiamo-nos em teóricos já apresentados anteriormente.

Na figura 3 a seguir, apresentamos o protocolo de uma dupla de alunos para uma atividade cujo objetivo era verificar se o aluno havia adquirido domínio das regras de derivação. Ao analisarmos a figura 3, identificamos a dificuldade da dupla de alunos em expressar seus pensamentos e escrevê-los de forma razoável, a partir do que foi solicitado.

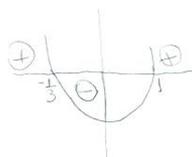
Figura 3 – Protocolo da dupla 01

Seja $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

a) Determine o domínio de f
 $x \in \mathbb{R}$

b) Determine os intervalos onde f é crescente

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
 $3x^2 - 2x - 1 = 0$
 $\Delta = 4 + 12 = 16$
 $x = \frac{2 \pm 4}{6}$ $x' = -\frac{1}{3}$ $x'' = 1$



crescente para $-\frac{1}{3} < x < 1$

c) Determine os intervalos onde f é decrescente

$1 > x > -\frac{1}{3}$

Fonte: Dados do pesquisador

Nesse protocolo, a dupla mostra que sabe resolver a derivadas, porém, na ocasião da análise e escrita do intervalo demonstra uma real falta de conhecimento ou comete uma transferência equivocada dos símbolos de desigualdade ao representar o que está sendo solicitado; ou seja, essa dupla representa erroneamente o intervalo onde a função é positiva. A resposta certa seria: a função é crescente em $x < -1/3$ ou $x > 1$. O erro expresso por essa dupla se encaixa na categoria Ω descrita anteriormente.

Outros erros estão apresentados na Figura 4, os quais ilustram erros da categoria β . Identificamos nesse protocolo, erros relacionados ao cálculo e à utilização de propriedades de potências, bem como erros cometidos ao aplicar as regras de derivação.

Figura 4 – Protocolo dupla 02

Seja $f(x) = (x^3 + 2x)^2$. Calcule $\frac{dy}{dx}$.

$$(x^3)^2 + 2(2x \cdot x^3) + (2x)^2$$

$$x^9 + 4x^2 \cdot x^6 + 4x^2$$

$$x^9 + 4x^8 + 4x^2$$

$$y'(x) = 9 + 32x^7 + 8$$

$$y'(x) = 17 + 32x^7$$

Fonte: Dados do pesquisador

Para o melhor entendimento da nossa análise, que está vinculada à Categoria β no caso desse protocolo, ao olharmos para a segunda linha da resolução, observamos que o aluno possui uma deficiência conceitual em regras de potenciação, sendo que os erros ocorreram em cadeia a partir desse ponto. Nesse caso, uma retomada a respeito das regras de potenciação e também de derivadas será importante.

Ao aplicar o algoritmo para este experimento, e tomando as análises representadas na quadro 1, realizadas pelos dois avaliadores, em que o grau de similaridade encontrado entre as análises parece apontar para uma concordância entre eles.

Quadro 1 – Análises dos avaliadores

| | | |
|-----------------|--|---------------|
| Avaliador 01 | A análise e escrita do intervalo demonstram uma aparente falta de conhecimento ou comete uma transferência equivocada dos símbolos de desigualdade ao representar o que está sendo solicitado, ou seja, essa dupla representa erroneamente o | 42,33% |
|-----------------|--|---------------|

| | | |
|-----------------|---|--|
| | intervalo onde a função é positiva. | |
| Avaliador 02 | Ao analisar o resultado foi possível verificar que há uma falta de conhecimento no que tange a desigualdade, ou ainda, um erro na escrita e interpretação dos símbolos de desigualdade, desta forma, foi cometido um erro de representação onde o intervalo da função é positivo. | |

Fonte: Autor

Em um segundo momento retirou-se as StopWords (palavras que possuem alta frequência e pouco significado semântico – tradução e interpretação livre) das duas avaliações, obtivemos um grau de similaridade de 38,00%, que em comparação com a não retirada das StopWords não melhora o grau de similaridade entre as duas análises.

Outro passo foi dividir as duas análise de maneira a separá-las em análise e conclusão, esta divisão resulta em 47,36% o grau de similaridade, onde foi analisada somente a conclusão não aumentando o grau de similaridade em relação a totalidade da análise.

Por fim, foram retirados os StopWords somente da conclusão, o que resultou em 50,87%, indicando um maior grau de similaridade entre os dois avaliadores.

Ao olharmos apenas para a similaridade na conclusão dos avaliadores, podemos refinar a identificação, “de que tipo são” esses erros e categorizá-los melhor, proporcionando ao professor uma análise mais aprimorada para a tomada de decisão sobre o tratamento a ser ministrado aos alunos, permitindo que os professores se dêem conta das deficiências na aprendizagem de conteúdos prévios ou recentes e de equívocos comuns de raciocínio em sala de aula; não apenas com a finalidade de corrigi-las mediante retomada dos conteúdos e, conseqüentemente, melhoraria dos processos de aprendizagem.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, nos preocupamos em apresentar resultados iniciais utilizando PNL, em especial o algoritmo de Levenshtein (1965) como forma de examinar a similaridade existente entre as análises de Erros, realizadas por dois avaliadores que identificaram e categorizaram os erros cometidos pelos alunos ao desenvolverem as atividades relacionadas ao conteúdo de derivadas. O resultado apresentado pelo algoritmo indica que os avaliadores possuem um nível de

similaridade boa (42,85% de semelhança). Entretanto quando analisamos apenas as conclusões dos avaliadores essa semelhança atinge um índice melhor, ou seja, 50,87%. Destaca-se que tais atividades foram desenvolvidas em horários regulares de aula da turma tendo a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem. Destacamos que uma quantidade significativa dos erros que os alunos cometeram não são relativos, especificamente, ao assunto que estava sendo desenvolvido, mas sim às lacunas de conhecimentos prévios que foram mobilizados na construção do conhecimento sobre os conceitos de derivadas.

Conforme descrito por Torre (2007), o erro assume o caráter didático, não sendo o fim, mas um meio, um recurso que informa ao professor que o aluno que se equivoca necessita de ajuda.

Estamos convencidos que trabalhar a Matemática com êxito implica saber quando temos que explorar, eleger o caminho mais adequado, seguir a intuição para ver se dá frutos, mas também, garantir que nossos alunos estejam mais dispostos a experimentar o desconhecido, a hora de trabalhar eles mesmos a Matemática. Isto leva a procurar atividades que promovam a discussão, reflexão e fornecer-lhes os meios para ver como você pode obter resultados forma mais eficiente e criteriosa. Na medida em que ensinamos nossos alunos a pensar independentemente e a utilizar os conhecimentos de que dispõe, teremos desenvolvido nosso trabalho de professor com êxito.

REFERÊNCIAS

ABDELMALACK, A. **O ensino-aprendizagem-avaliação da derivada para o curso de engenharia através da resolução de problemas**. 175 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. In: **Boletim GEPEN**, Rio de Janeiro, ano 31, n. 55, p. 133-154, jul/dez 2009.

BASTOS, A. S. A. M. **Análise de erros matemáticos na resolução de problemas, aplicados à física elétrica**. 199 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2013.

BAEZA-YATES, R.; RIBEIRO-NETO, B. **Recuperação de informação**. 2. ed. [s.l.] Bookman, 2013.

BASTOS, A. S. A. M.; ALLEVATO, N. S. G. Análise de Erros: Perspectivas nos Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática. In: LOPES, C. E.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). **Matemática e Tecnologias**. São Paulo: Terracota, 2011, p.17-38.

BORASI, R. Using Errors as Springboards for the Learning of Mathematics: an Introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.7, n. 3-4, 1985, p. 1-14.

BRANDÃO, C. R. Pesquisar-Participar. In: BRANDÃO, Carlos R. (Org.). **Repensando a Pesquisa Participante**. São Paulo: Brasiliense, p. 7-14, 1987.

CAI, J; LESTER, F.. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? In: **Boletim GEPEM**. Trad. Bastos, A. S. A. M. e Allevalo, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, 2012, p. 241-254. Disponível em <<http://www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=837>>. Acesso em: 11 jan. 2013.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**. São Paulo: PEARSON, 2004.

JURISTO, N.; MORENO, A. M. **Basics of software engineering experimentation**. Springer Science & Business Media, 2013.

LEVENSHTEIN, V. I. Binary codes capable of correction deletions, insertions, and reversals. In: **Soviet Physics**. Doklady, 1965.

MARTINS, G. A.; THEÓPHILO, C. R. **Metodologia da investigação científica para ciências sociais aplicadas**. São Paulo: Atlas, 2009.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, ano 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

_____. Ensino-Aprendizagem-Avaliação: por que através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTILIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**, volume I. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TORRE, S. de la. **Aprender com os erros**: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: ARTMED, 2007.