NÚMEROS RACIONAIS EM SUA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA: INVESTIGAÇÃO DE PESQUISAS SOBRE SEU PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Aparecida Ferreira Lopes[1]

Sandra Aparecida Fraga da Silva [2]

Silvana Cocco Dalvi[3]

Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: O presente trabalho é recorte de uma pesquisa de mestrado e tem por objetivo analisar estudos que discutem sobre abordagens e obstáculos encontrados no processo de ensino e aprendizagem do conceito de número racional na sua representação fracionária. A temática se justifica por envolver um trabalho pedagógico dinâmico capaz de propiciar aos alunos a compreensão do conceito de número racional e sua aplicação em diferentes contextos socioculturais. De cunho bibliográfico, a pesquisa visitou publicações de teses, dissertações, artigos e documentos. Os resultados revelam que os alunos apresentam dificuldades na compreensão da própria *unidade* da fração, no significado do número fracionário e na aplicação das novas propriedades que regem o conjunto dos números racionais. Conforme ressalta os documentos, a organização curricular envolvendo os números racionais na sua representação fracionária deve ser contínua e gradativa ao longo do percurso escolar. Os estudos mostram, segundo Toledo e Toledo (1997), Nunes e Bryant (1997), Fonseca (1997), Campos e Rodrigues (2007), Bezerra (2001), dentre outros, que o trabalho pedagógico que propicia a compreensão do conceito de números racionais deve pautar-se na resolução de problemas concretos que façam sentido para o aluno, jogos e desafios e a expansão do modelo parte-todo. Nota-se que o processo ensino e aprendizagem dos números racionais é abrangente e complexo, o que requer uma visão globalizada sobre o mesmo, formação de docentes para os anos iniciais, pesquisa e reflexão a fim de minimizar dificuldades de aprendizagem em relação ao conceito de números racionais em sua representação fracionária.

Palavras Chaves: Números Racionais. Representação fracionária. Ensino Fundamental. Formação docente. Ensino e Aprendizagem.

Introdução

O estudo dos números racionais é abrangente envolvendo: conceito, leitura, tipos de frações, propriedades, equivalência, comparação e operações. Por ser considerado por muitos como difícil exige um trabalho pedagógico dinâmico que conduza os alunos a compreensão e apropriação desse conceito ao longo dos anos de escolarização. Assim destaca Silva (2007) quando afirma que

[1]Mestranda em Educação em Ciências e Matemática. Ifes; PMVV; PMV.cidalopeses@gmail.com

[2]Doutora em Educação.Ifes.sandrafraga7@gmail.com.

[3]Mestranda em Educação em Ciências e Matemática. Ifes .silvanacoccodalvi@gmail.com

> [...] Desse aspecto pedagógico, de um ensino voltado à memorização e à aplicação de algoritmos, o conteúdo de frações apresenta-se como um dos vilões do fracasso escolar, já que exige uma ação do pensamento e um grau de abstração que não é muito presente nas salas de aula da educação básica (SILVA, 2007, p.295).

Os números racionais em sua representação fracionária assumem significações diferentes dependendo da situação problema, tais como: fração parte-todo, fração quociente, fração como número, fração como operador multiplicativo, fração como medida e fração com significado de razão. Para Onuchic e Allevato (2008) não se trata de apresentar nomes as “personalidades” do número racional, mas que ao conhecê-los o professor possa usá-los para desenvolver suas atividades de maneira intencional e consciente.

Ao visitar a literatura, mantivemos nosso olhar sobre o processo ensino e aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária em formação docente. Pesquisamos nos GT 1 e GT7 que tratam de ensino de matemática AI e Formação de professores respectivamente, trabalhos publicados em eventos como Sipem, Enem, CIEM encontrados no site da SBEM. É recorte de uma pesquisa de mestrado que busca compreender o processo de formação e suas influências em (re) construções do conhecimento de frações e em narrativas de práticas de professores dos anos iniciais. Nesse texto buscamos analisar estudos que discutem sobre abordagens e obstáculos encontrados no processo de ensino e aprendizagem do conceito de número racional na sua representação fracionária e sugestões de práticas pedagógicas que colaboram para uma melhor aprendizagem das frações além do processo histórico sobre o surgimento das frações.

Um pouco de história

De acordo com Caraça (1951) à medida que as relações dos homens uns com os outros se intensificaram e o nível de civilização foi aumentando a contagem se impôs cada vez mais como uma necessidade. Assim, o novo surge da necessidade de um coletivo, de uma civilização.

Nas obras de Boyer (2001), Caraça (1984) e Cajori (2007) encontram-se trechos do Livro II das Histórias de Heródoto nas quais ele diz que o rei Sesótris, dividiu a terra entre todos os egípcios. Durante a inundação do Nilo, algumas demarcações foram desfeitas. O rei mandou seus medidores descobrirem o quanto cada terreno ficou menor. A unidade de medida padrão utilizada era o cúbito ou côvado cujo comprimento era equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó. As cordas dos estiradores possuíam vários nós, cuja distância entre dois nós consecutivos era a medida do cúbito. Para medir, os estiradores comparavam a corda com o contorno da porção de terra a ser medida. A medida encontrada era a quantidade de vezes que o cúbito cabia nesse contorno. Nem sempre o cúbito cabia um número inteiro de vezes no comprimento a ser medido e a necessidade de fazer medições com mais precisão levou os egípcios a criarem subunidades do cúbito, fracionar a unidade de medida. A partir deste experimento, o homem sentiu necessidade de controlar quantidades cuja unidade de medida não era inteira.

Na busca de solução para esse problema, depois de longo processo, na simples negação dessa impossibilidade, e a divisão indicada, antes considerada impossível, passou a ser vista como a representação de um novo tipo de número, que expressa o resultado da divisão, apesar de não poder ser expresso por um número inteiro. Ao fracionar a unidade, ou, constituir o conceito de fração, proporcionou o que seria a expansão do campo dos números naturais ao campo dos números racionais.

Caraça (1951, p. 29) considera que medir “[...] consiste em comparar duas grandezas n da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc”. Destaca três fases e três aspectos distintos ao ato de medir: a escolha da unidade, a comparação com a unidade, a expressão do resultado dessa comparação com um número. Caraça (1951) pontua:

> Encontramos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais, ou campo racional – que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números fraccionais; estes são, de facto, os números novos.
> As vantagens obtidas pela sua criação aparecem desde já como sendo as seguintes:
> 1.ª – É possível exprimir *sempre* a medida de um segmento tomando outro como unidade; se, por exemplo, dividir a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir, diz-se que a medida é o número 2/5.
> 2.ª – A divisão de números inteiros *m* e *n* pode agora sempre exprimir simbolicamente pelo número racional m/n – o cociente 2 por 5 é o número racional fraccionário 2/5 o cociente de 10 por 5 o número racional inteiro 10/5 = 2 (CARAÇA, 1951, p. 36-37).

Esses fatos mostram a importância da *unidade* a ser considerada na medição e sua estreita relação com o estudo da representação em fração. O desenvolvimento social e tecnológico levou o homem a utilizar os números racionais em outras situações da vida moderna como nas operações do sistema monetário brasileiro, nas medições de temperaturas, na culinária e contextos diversos, onde há necessidade de representação de partes menores que *um inteiro* ou em inteiros completos mais partes como o caso das frações mistas.

Os vários significados do número racional na sua representação fracionária

Teóricos apresentam distintas interpretações sobre os significados de frações. Nunes et. Al (2003) afirma que uma aprendizagem de fração obtém maior sucesso quando explora os seus diferentes significados sendo importante também, considerar os invariantes operatórios desse conceito. Buscando solucionar algumas das dificuldades encontradas na aprendizagem do número racional na forma fracionária, Nunes et al (2003) classifica a fração[4] em cinco significados dentro de um contexto de quantidades contínuas[5] e discretas: fração como número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Citamos a classificação dos significados de frações de Nunes et al (2003) ampliados a partir das ideias de Kieren (1988, 1994).

<u>Fração como Parte-todo</u>

A ideia é da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais e cada parte pode ser representada como 1/n. Um todo dividido em partes iguais.

<u>Fração como Quociente</u>

Este significado está presente em situações em que envolve a ideia de divisão. Fração como quociente de divisão de um número inteiro por outro, desde que seja diferente de zero.

<u>Fração como Número</u>

As frações, como os inteiros, são números que não precisam, necessariamente, referir-se a quantidades específicas. Existem duas formas de

---

[4] A partir desta parte utilizaremos o termo fração para tratar os números racionais representados em forma de fração.

[5]Quantidades contínuas àquelas que podem ser divididas infinitamente, sem perderem suas características o que não ocorre quando dividimos infinitamente uma quantidade discreta.

representação fracionária: ordinária e decimal sendo que podem ser representadas na reta numérica.

Fração como Operador Multiplicativo

O significado operador multiplicativo nos dá a ideia de função com b ≠ 0, que ao ser aplicada em um número, que nesse contexto referência o “todo”, transforma-o. Por exemplo, ao calcular $\frac{3}{4}$ do número 20, o operador faz duas operações: uma divisão do todo em “quartos” e, em seguida, uma multiplicação tomando-se três (3) dessas partes, ou ainda, uma multiplicação do todo por três (3) e, em seguida, a divisão em “quartos”.

Em grandezas contínuas o significado de um operador multiplicativo é semelhante ao processo de “encolher” ou de “esticar”. Tomemos como “todo” um segmento de comprimento *d* e seja o operador utilizado para transformar o número *d.* O resultado dessa operação é o número que podemos interpretar geometricamente como uma parte do todo (segmento) que tínhamos inicialmente. O efeito do operador sobre o “todo” foi de redução, pois o número é < 1. Se tomarmos como operador um número maior que um, de maneira análoga, podemos interpretar geometricamente uma ampliação do segmento.

Fração como medida

Caraça (1951) afirma que Medida envolve a ideia de comparação sendo necessário que se estabeleça um termo único de comparação entre duas grandezas de mesma espécie. A questão exige uma resposta para a pergunta “quantas vezes”.

Fração como Razão

Para Kieren (1988) o significado razão é uma relação de comparação multiplicativa entre duas quantidades de mesma grandeza ou não.

É importante no estudo de fração que seja possibilitado aos alunos resolver problemas que abrangem os diferentes significados do número racional. Esses significados têm propriedades matemáticas semelhantes e precisam ser trabalhados com problemas diferentes levando os alunos a perceberem que dependendo do contexto assumem diferentes significados. O quadro 1 faz um resumo da classificação dos significados por diferentes pesquisadores.

Quadro 1 – Classificação pesquisadores sobre ideias de fração

Autores/ Significados	Beher; Lesh; Post e Silver	Nesher apud Ohlsson, 1987	Kieren	Botta; Onuchic	Nunes et al Nunes; Bryant	Moutinho	Damico	PCN BRASIL
Ano	1983	1985	1988; 1993	1997	2003; 2005	2005	2007	1997
Coordenadas Lineares	X							
Decimal	X							
Medida	X		X	X	X Qte Ext. e Intensiva	X	X	
Número		X	X		X	X	X	
Operador Multiplicativo	X	X	X	X	X	X	X	
Parte-Todo		X	X	X Medida	X	X	X	X
Probabilidade		X						
Quociente	X		X	X Partição e Quotização	X	X	X	X
Razão	X	X		X				X
Taxa	X							

Fonte: elaborado pelas autoras

Dificuldades na aprendizagem das frações

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) destacam que o estudo de um novo conjunto numérico ostenta obstáculos a sua aprendizagem uma vez que cria novas propriedades em relação ao conjunto anterior e os alunos tendem a usar na íntegra esses conhecimentos ao novo conjunto. Destaca cinco pontos de obstáculos à aprendizagem quando o aluno faz essa relação: número natural e racional:

> Um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferente (e infinitas) escritas fracionárias [...]; outro diz respeito à comparação entre racionais; acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 < ½; Se o 'tamanho' da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais (8345 > 41), a comparação entre

> 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério; se ao multiplicar 10 por ½ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10; se a sequência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 então números como 0,81, 0,815 ou 0,87 (BRASIL, 1997, p. 67).

Bertoni (2009) diz que a representação fracionária ajuda os alunos a entender melhor conteúdos como razão, escalas, porcentagens, possibilidades e assuntos do dia a dia. Entretanto, preocupa-se com o ensino do conceito de fração apenas como divisão de figuras geométricas e a memorização de regras operatórias. Observa que é preciso encontrar meios de levar o aluno a enxergar frações no cotidiano e apropriar-se da ideia do número fracionário de forma significativa. "O conteúdo de frações têm sido um dos mais difíceis do ensino fundamental. Avaliações e pesquisas atestam baixo rendimento dos alunos no assunto" (BERTONI, 2009, p.16).

De acordo com pesquisas de Silva (1997), Campos (1999), Bezerra (2001) e Nunes (2003) existem dificuldades em relação ao conceito de fração, tanto do ponto de vista do seu ensino como da sua aprendizagem.

Cyrino (2014) destaca a situação de professores que ensinam matemática, mas que não tiveram oportunidades de aprender, discutir e refletir sobre ela tornando-os inseguros ao trabalharem alguns temas como frações, números racionais e razões ou mesmo o raciocínio proporcional. Afirma que

> [...] professores que não tiveram acesso a informações a respeito de elementos, conceitos, temas matemáticos, nem oportunidade ou estímulo a discussões e a reflexões cuja preocupação fosse às implicações dessas idéias no ensino e na aprendizagem da Matemática (CYRINO, 2014, p. 62).

Nunes e Bryant (1997) sobre a aprendizagem do conceito matemático supõe, previamente, que a aquisição se dá com seu reconhecimento em diversas situações e contextos. Dizem que mesmo resolvendo corretamente as questões, se tratando de frações, os alunos podem passar pela escola sem compreender esse conceito. Um exemplo de interpretação errada feita pelo aluno é a dupla contagem de quando desconsidera que as partes têm tamanhos diferentes e, ainda assim, faz referência entre parte-todo. Para eles existe uma conexão entre divisão e fração.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que deve-se buscar a origem da compreensão do conceito de fração em um contexto que abordem situações de divisão. A intenção dos autores é mostrar que existe uma distância entre o entendimento que as crianças têm sobre propriedades básicas de frações e atividades que são resolvidas no contexto de avaliações educacionais. Assim,

> [...] Quando as crianças resolvem tarefas experimentais sobre divisão e números racionais, elas se engajam em raciocinar sobre as situações. Em contraste, quando elas resolvem tarefas matemáticas em avaliações educacionais elas veem as situações como um momento no qual elas precisam pensar em que operações fazer com os números, como usar o que lhes foi ensinado na escola, concentrando-se em manipulações de símbolos, os alunos poderiam desempenhar em um nível mais baixo do que teriam desempenhado se tivessem se preocupado mais com a situação-problema (NUNES; BRYANT, 1997, p. 212).

Bezerra (2001) desenvolveu sua pesquisa com alunos da terceira série do ensino fundamental e elencou seis categorias de erros relacionados ao ensino das frações:

> - E1: Relacionar parte-parte, em quantidades discretas ou contínuas – consiste na contagem da parte destacada procedendo à contagem das demais partes esquecendo de relacionar o todo. Um exemplo é quando a criança representa uma situação de resposta ⅓ e ela apresenta ½. Realizou a contagem das partes colorida e não colorida separadamente.
> - E2: Relacionar todo-parte, em quantidades discretas ou contínuas – a criança inverte a posição do numerador e denominador;
> - E3: Representar uma fração utilizando somente os números naturais – a criança não consegue operar no novo conjunto numérico. Representa a fração 2/4 apenas com o 2.
> - E4: Considerar a palavra usada na leitura de uma fração como sendo a quantidade a ser assinalada, por exemplo, a quinta parte como sendo 5;
> - E5: Com quantidades discretas, centrar-se em uma única figura (observação da quantidade contínua) e desprezar as demais que compõe o todo;
> - E6: Realizar a divisão de uma quantidade contínua, desprezando a conservação das áreas na figura e repartindo as partes, segundo um critério aleatório (BEZERRA, 2001 p.158-1590.
> -

As dificuldades relacionadas na literatura são pontos reflexivos para um trabalho pedagógico eficiente que conduza à aprendizagem do conceito de frações.

O trabalho pedagógico com as frações

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1997) e a proposta de formulação da Base Nacional Comum Curricular-BNCC[6] (BRASIL, 2016) orientam que o estudo com números racionais deve iniciar-se no segundo ciclo do ensino fundamental, sendo retomado nos ciclos posteriores. Sugerem que o estudo inicia-se por meio da resolução de problemas a partir do contexto sociocultural dos alunos.

Quanto às representações PCN (BRASIL, 1997) afirma que a representação decimal é percebida com maior frequência que a fracionária devendo iniciar esse estudo pelos decimais. Relaciona ao advento das calculadoras sendo que a representação fracionária conecta à linguagem dos termos da fração. Propõe explorar três significados para a fração: a relação parte-todo, quociente e razão. O documento não faz menção às operações com números racionais na forma fracionária.

Bezerra (2001) advoga a favor do estudo de frações por meio da resolução de problemas concretos. Alerta que a relação parte-todo não deve ser a única nem tampouco o início para o aprendizado das crianças. Explica que na sequência didática desenvolvida na pesquisa obteve resultados satisfatórios. Introduziu o conceito de fração por meio do modelo quociente e, no desencadear das atividades apresentaram o modelo parte-todo mesclando as duas concepções. Destaca a importância de trabalhar com quantidades contínuas e discretas para que as crianças não conceituem de forma errada as frações. Sugere aos professores que procurem criar novas situações de aprendizagem tornando o espaço da sala de aula um local alegre para as crianças.

Campos e Rodrigues (2007) argumentam que é na passagem das situações conceituais para os algoritmos que a fração adquire o status de número. Os autores apresentaram aos alunos duas ou mais unidades de um determinado objeto, repartidas segundo uma condição estabelecida, cujas partes selecionadas deveriam ser reagrupadas e expressas como fração de uma única unidade. Consideram imprescindível na construção do conceito de fração a compreensão da ideia de *unidade* que contribui para que os alunos não enxerguem o número fracionário segmentado por um traço convencional separando o numerador do denominador.

Fonseca (1997) considera que devem ser exploradas atividades que contribuam na formação do conceito de números racionais através das relações

[6] Versão Preliminar

entre parte e todo que permitam novas descobertas. Sugere atividades pedagógicas envolvendo situações problemas e jogos onde as crianças são desafiadas a usar seus esquemas mentais na resolução das atividades propostas.

> É fundamental que o desenvolvimento do ensino de fração seja apoiado em situações reais, significativas no cotidiano dos alunos, e a partir de situações problema, jogos e desafios, buscando a construção de um conceito intuitivo de frações (FONSECA, 1997, p. 53)

Behr et al. (1983) destacam que quando inicia-se o estudo com os números racionais a criança ainda está num processo de transição entre a fase concreta para a fase abstrata onde acontece uma reorganização cognitiva. Primeiro, as ideias mais próximas do dia a dia das crianças e, mais adiante, as ideias mais abstratas. Consideram importantes para o ensino os materiais manipulativos, pois por meio deles as ideias matemáticas são abstraídas em estruturas lógico-matemáticas provocando a diminuição de sua dependência, tornando sua aprendizagem mais autônoma.

Toledo e Toledo (1997) afirmam que é preciso, atenção na utilização de recursos manipulativos ao se abordar grandezas discretas uma vez que o número fracionário indica o tamanho de cada parte obtida, mas envolve também um número natural que indica a quantidade de elementos da subcoleção dessas partes. Afirmam que na introdução dos números racionais as atividades devem extrapolar colorir figuras. As crianças devem manipular objetos diversificados com intuito de:

> a) Repartir quantidades discretas ou contínuas em porções iguais com estratégias próprias;
> b) Verificar se as porções obtidas são realmente iguais: no caso de grandeza discreta por meio de comparação de quantidades e nas grandezas contínua por sobreposição das partes;
> c) Conferir se a partição está completa, recompondo a coleção ou figura inicial (TOLEDO, Marília; TOLEDO,Mauro; 1997, p.168).

Toledo e Toledo (1997,) destacam a importância do professor mediador entre as impressões e experiências trazidas pelos alunos e os conteúdos da disciplina de matemática.

Considerações finais

Os estudos visitados mostram que muitos alunos têm dificuldades na compreensão dos números racionais em sua representação fracionária. Assim, é fundamental que o professor conheça os significados de frações de forma a planejar seu trabalho contínuo e gradativo ampliando os conhecimentos dos alunos. Precisa ter bem definido o caminho percorrido pelos alunos durante a trajetória escolar. O uso de metodologias inadequadas, a falta de conexão entre a matemática da escola e as experiências vivenciadas pelos estudantes, o uso exagerado das técnicas, entre outros, são fatores que contribuem para o fracasso dos estudantes na compreensão desse conceito.

Além da organização curricular elaborada nos documentos oficiais, práticas pedagógicas que contemplem quantidades contínuas e discretas, a não limitação ao modelo parte-todo, a manipulação de objetos diversificados, o uso de situações problemas desafiadoras, jogos, entre outras propiciam a compreensão do conceito de número fracionários. O professor deve usar sua criatividade criando novas possibilidades de reflexão e aprendizagem das frações.

Enfatizamos a necessidade da pesquisa como alicerce de transformação no ensino das frações e formação docentes. Os resultados apresentados são inconclusos, mas alimentam o debate sinalizando que é pertinente a discussão e reflexão sobre o processo ensino e aprendizagem

Referências bibliográficas

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R.; SILVER, E. A. Rational-Number Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.) Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

BERTONI, N. E. **Educação e Linguagem Matemática IV:** Frações e Números Fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BEZERRA, F. I**ntrodução do Conceito de Número Fracionário e de suas Representações:** Uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, São Paulo. 2001. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/18487>. Acesso em: 12 mai. 2017.

BOTTA, L.; ONUCHIC, L. R. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, V. 5, n. 3, p. 5-8, 1997.

BOYER, C. B. História da Matemática. – 3. imp. – São Paulo: Editora Edgard Blüncher, 2001

BRASIL.Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEF, 2016. (2ª Versão Preliminar).

CAJORI, Florian. Uma História da Matemática. Trad. Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2007.

CAMPOS, T.M.M.; RODRIGUES, W.R., A idéia de unidade na construção do conceito REVEMAT - **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v2.4, p.68-93, UFSC: 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/12992/1209>. Acesso em: 07 jun. 2017.

CARAÇA, B. DE. J. **Conceitos fundamentais de matemática**. Lisboa, 1951.

________________ Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

CYRINO, M.C.C.T.; OLIVEIRA, L.M.P.de. Aprendizagens a Respeito do Raciocínio Proporcional em uma Comunidade de Prática de Professores Matemática. **Anais do VI SIPEM**. Pirenópolis, Nov. 2015. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/visipem/anais/story.html. Acesso em: 06 fev. 2016

DAMICO, Alécio. A Investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental. Doutorado em educação matemática- PUC-S, 2007.

FONSECA, S. **Metodologia de Ensino** – Matemática. Minas Gerais: Editor Lê, 1997.

KIEREN, T. E. "*Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development",* ***Em "*** **Number Concepts and Operations in the Middle Grades, J. Hiebet& M. Behr(eds.), pp 162- 181,1988.**

MOUTINHO, L.V.Fração e seus diferentes significados: Um estudo com alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental. 2005. Dissertação de Mestrado PUC - SP.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

_________.; BRYANT, P., PRETZLIK, U. & HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado à British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, June, 2003.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes “personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. Boletim de Educação Matemática. **Bolema,** vol.21, n. 31, 2008, p 79 -102. Disponível em: <www.redalyc.org/pdf/2912/291221883006.pd>. Acesso em: 20 mai. 2017.

SILVA, Maria José. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário.** 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

SILVA, J. A. da. Modelos explicativos elaborados por adolescentes de adultos para o cálculo com frações: da percepção ao pensamento operatório. Educação matemática pesquisa, v. 9, n.2, p. 169-349, 2007.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de Matemáti**ca: Como dois e dois. A comunicação da Matemática – São Paulo: FTD, 1997.