ÁLGEBRA ELEMENTAR: dimensões e aspectos discutidos a partir da resolução de problemas

Simone Simionato dos Santos Laier[1]

Resumo:
Este texto apresenta parte de uma pesquisa com resolução de problemas matemáticos, que estudou dimensões e aspectos da álgebra, revelados por alunos da Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática. Por meio da pesquisa qualitativa exploratória, buscamos enfoque nos elementos das resoluções que evidenciassem uma sequência de etapas ou procedimentos. A regularidade apresentada nas operações evidenciou que uma esquematização de ideias é potencializada pela resolução de problemas como maneira de pensar matematicamente, ao se considerar os processos envolvidos. Em relação às dimensões da álgebra, as operações pautaram-se na variação de grandezas com o uso de letras expressando relações para o estabelecimento de equações.

Palavras Chaves: Resolução de Problemas. Álgebra. Dimensões da Álgebra. Processos de Resolução.

1. Introdução

A álgebra elementar[2] é um dos temas estruturadores do currículo, pois sua importância para o desenvolvimento da linguagem matemática estende-se a todos os objetos de estudo dos campos numéricos e das operações. Seus procedimentos básicos podem ser resumidos em calcular, resolver, identificar variáveis, até o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares.

Considera-se ainda que, a álgebra pode evoluir em consonância com a evolução e sistematização de certas técnicas operatórias. A partir daí, tem-se que:

> A visão mais habitual da Álgebra é que se trata simplesmente de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações. Isso é testemunhado pela terminologia usada nos atuais programas dos 2º e 3º ciclos do ensino básico que, em vez de falarem em “Álgebra”, falam apenas em “cálculo” ou, em “cálculo algébrico”. Trata-se, claramente, de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (resolução de problemas), quer atuais (relações, estruturas algébricas), quer mesmo do período “clássico” da álgebra (estudo de funções e de variação em geral) (Ponte, 2006, p. 6).

---

[1] Mestre em Educação. UFMT. sisimionato@hormail.com

[2] Entende-se por a álgebra elementar, os conteúdos contemplados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Por meio da resolução de problemas matemáticos, pode-se apostar na busca pela percepção das relações entre a formação inicial e conhecimentos algébricos que os alunos demonstram possuir. A partir daí, na pesquisa para a dissertação, buscou-se respostas para alguns questionamentos, tais como: Quais habilidades algébricas os alunos demonstrariam possuir? Que estratégias mobilizariam ao resolverem problemas matemáticos? A resolução de problemas pode se configurar em uma ferramenta útil para que habilidades algébricas sejam evidenciadas?

Sendo assim, um estudo foi desenvolvido no sentido de identificar aspectos do pensamento algébrico revelados por futuros professores de matemática, ao resolverem problemas com potencial para mobilizar esse tipo de pensamento, evidenciados em seus registros e reflexões sobre eles.

Desse modo, a partir de Laier (2014), discute-se que a resolução de problemas na Educação Matemática pode ser entendida sob diferentes enfoques, bem como ser tratada a partir de diferentes abordagens. O que isso quer dizer? É apropriado expor que, buscando entender como esse assunto passou a ser foco nas discussões da Educação Matemática, mudanças foram percebidas nas ideias e concepções que são apresentadas para o ensino e aprendizagem da matemática por meio da resolução de problemas.

D'Ambrosio (2008) afirma que "a resolução de problemas sempre foi considerada uma parte importante do ensino de matemática". Essa abordagem sofreu transformações ao longo dos anos, mais especificadamente a partir de 1930, com os trabalhos de Polya e Dewey. As propostas iniciais para a utilização da resolução de problemas em sala de aula eram pautadas inicialmente em regras e procedimentos a serem seguidos. Posteriormente, buscava-se a experiência vivida pelo aluno ao resolver um problema, os processos envolvidos e de que modo foram importantes para a aprendizagem.

Fundamentalmente, a resolução de problemas na Educação Matemática pode ser vista como um canal que privilegie a potencialidade de estimular os processos cognitivos dos alunos, quando as atividades apresentadas tenham em seu interior núcleos que proporcionem a argumentação, justificação, diálogo e organização dos conhecimentos que foram mobilizados para apresentar a solução e os caminhos feitos para a obtenção de um resultado (LINS; GIMENEZ, 1997).

Sendo assim, o enfoque deste texto é discutir (a partir de um recorte da pesquisa de mestrado) os processos envolvidos na resolução de problemas matemáticos, a fim de investigar as dimensões e aspectos algébricos evidenciados pelos alunos.

2. A Resolução de Problemas no contexto deste estudo

A Resolução de Problemas pode ser vista e entendida por meio de diferentes pontos de vista[3], além de oferecer distintas aplicabilidades para o ensino da matemática. Wielewski (2005, p. 215) afirma que: “Na formalização padrão da Matemática não podemos expressar a distinção entre situação problemática, representação do problema ou pergunta e problema matemático”, salientando que, muitas vezes, o professor que propõe um problema matemático para o aluno, pode não entender que para este aluno, a atividade pode não ser vista como um problema, mas sim uma situação problemática. Assim a autora é coerente ao dizer que “a resolução de um problema depende de um amplo grau na escolha de uma representação adequada” (p. 215-216), que de certa maneira interfere em como o aluno vai compreender o que ele precisa resolver e como o fará.

Cada tipo de problema matemático tem seu objetivo específico quando se quer explorar uma atividade por meio da resolução de problemas. Assim, o interesse maior está em explorar as habilidades que estão envolvidas na resolução. Ao apresentar etapas para que um problema matemático fosse resolvido, para padronizar certas habilidades e programas para serem seguidos nas atividades, Polya (1978) discute que na tentativa de resolver um problema, as suas variações podem oferecer elementos auxiliares[4], que deixam a solução mais acessível. Polya apresenta etapas que sugere para resolver um problema. São quatro e implicam em passos a serem seguidos para qualquer natureza de problema, sendo: Compreensão do Problema; Estabelecimento de um plano; Execução do Plano; Retrospecto.

---

[3] Polya (1975): precursor de importantes discussões sobre resolução de problemas, estabelece a sistematização de etapas e procedimentos que induzem à exploração de atividades matemáticas; Dante (2009): discute o que é um problema matemático, classificando-o e identificando possibilidades que podem ser exploradas pela resolução de problemas para a aprendizagem; Onuchic (1999, 2004, 2008, 2009): discute a trajetória da resolução de problemas no Brasil, além de apresentar uma perspectiva da resolução de problemas como perspectiva metodológica para o ensino-aprendizagem-avaliação; Smole e Diniz (2001): também tratam a resolução de problemas como perspectiva metodológica; Wielewski (2005): discute a resolução de problemas na formação de professores de matemática;

[4] Notações matemáticas, figuras, esquematizações etc.

A alegação que Polya apresentou para argumentar o quanto estas quatro fases são indispensáveis, presume que a solução para um problema, ao ser procurada, envolve pontos de vista que variam continuadamente e por vezes, a mudança de estratégias é indispensável. Ainda destaca que é inútil executar detalhes sem perceber a conexão principal ou sem ter feito uma espécie de plano.

3. Resolução de Problemas Algébricos

Coxford e Shulte (1995) contemplam questões da álgebra referentes às suas ideias, os conhecimentos algébricos, as expressões e equações algébricas, a resolução de problemas em álgebra, até ideias para seu ensino. Voltando-se para a resolução de problemas, os autores tecem recomendações respaldadas em princípios gerais de ensino que sugerem: basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm; levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico; introduzir os tópicos de álgebra com aplicações; ensinar os tópicos de álgebra a partir da perspectiva de como poderiam ser aplicados; ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para a compreensão e resolução de problemas; e comprometer os alunos com a resolução de problemas.

Ainda em relação à álgebra e à resolução de problemas, Schoenfeld (2007) apresenta em seu estudo uma discussão sobre as habilidades básicas para a álgebra que devem atender ao entendimento dos conteúdos algébricos elementares[5]. Para desenvolverem estas habilidades, defende que os estudantes devem resolver modelos de problemas, fornecendo justificativas para cada caso, aplicando técnicas algébricas para as resoluções, deixando de lado os procedimentos mecânicos e evidenciando o raciocínio, pensamento, conexões ou comunicação.

4. Dimensões e aspectos da Álgebra

A aprendizagem da álgebra inicia nos anos finais do Ensino Fundamental, partindo das noções algébricas para lidar com as expressões e equações; conceitos

---

[5]Schoenfeld destaca os conteúdos que envolvem equações e sistemas lineares com duas variáveis, seus processos de resolução, representação gráfica e transformações algébricas.

como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento das regras para resolução de uma equação. Também deve estar presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos de conteúdo no relacionamento de grandezas etc.

Assim, para que estes aspectos sejam atendidos, os PCN indicam um trabalho com problemas, que permitam aos alunos darem significado à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra "ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas" (PCN, 1998, p. 84).

Diferentes interpretações da álgebra escolar são baseadas nas funções das letras, tendo em vista que evolui em quatro dimensões, o que leva à uma adaptação ao uso da sua linguagem e consequentemente, a uma estruturação do que pode ser chamado de pensamento algébrico. Assim, para as interpretações da álgebra e funções das letras (quaro 2), classifica-se:

Quadro 1: Interpretações da álgebra e funções das letras.

Dimensões da álgebra	Aritmética generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das Letras	Como generalizações do modelo aritmético.	Como variáveis para expressar relações e funções.	Como incógnitas.	Como símbolo abstrato.
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações e generalizações de padrões aritmético.	Variação de grandezas.	Resolução de Equações.	Cálculo algébrico para obtenção de expressões equivalentes.

Fonte: Adaptado dos PCN (1998, p. 116).

Esta estruturação que é dada para entender como a álgebra elementar pode ser construída ao longo da escolarização, leva a entender que somente a partir de uma construção progressiva, a dimensão estrutural será alcançada. Ainda existe muito a se avançar, no sentido de que a visão habitual[6] da álgebra seja sobrepujada.

A habilidade de pensar abstratamente pode ser trabalhada de forma significativa, se aos alunos forem proporcionadas experiências variadas envolvendo

[6] Como aritmética generalizada, vista como a parte da matemática que opera com letras (LAIER, 2014).

noções algébricas, nas séries iniciais, mesmo que de modo informal[7], em um trabalho articulado com a aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de álgebra mais sólida e rica em significados, passando a investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente, favorecendo a construção da ideia de álgebra como uma linguagem para expressar regularidades.

Nesse âmbito, as atividades algébricas propostas devem possibilitar a construção do conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras[8]. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real (LAIER, 2014).

5. Alguns resultados da pesquisa

Por meio de um estudo qualitativo exploratório com sete alunos de um Curso de Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática, matriculados no oitavo semestre; foram revelados dados importantes a partir da resolução de problemas matemáticos, sobre dimensões e aspectos da álgebra.

A partir da instrumentação da pesquisa que utilizou questionários, aplicação de problemas matemáticos, registros áudio visuais e observação direta; fez-se o estudo de aspectos do pensamento algébrico revelados na resolução dos problemas aplicados, além da identificação, nas resoluções apresentadas, de padrões e procedimentos seguidos pelos sujeitos, que evidenciaram regularidades bem subjetivas.

Pedro, João, Douglas, Mateus, Valter, Mariana e Paula, nomeados para serem mencionados na pesquisa mantendo o anonimato dos sujeitos; foram

---

[7] Jogos, exploração de ferramentas como calculadoras, *softwares,* materiais manipuláveis etc.
[8] Que podem ter função de variável, incógnita, parâmetro etc.

colaboradores valiosos em um estudo que se preocupou em olhar dimensões e aspectos da álgebra sob um enfoque de processos de resolução de problemas, a fim de apresentar dados que mostrem a importância a ser dada mais para os processos matemáticos, do que para os produtos finais de uma atividade.

Um Problema: possibilidade de Pensamento Algébrico

O problema apresentado no quadro 2 poderia ser resolvido de diferentes modos, e também sem a necessidade utilizar operações algébricas. Recorrendo ao que Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) preconizaram para aspectos que caracterizam a presença de um pensamento algébrico como sendo algo que pode ser desenvolvido gradativamente, antes mesmo de uma linguagem algébrica simbólica; nesse problema, observou-se um potencial para perceber e tentar expressar estruturas aritméticas de uma situação-problema, interpretando igualdades como equivalências entre grandezas e, até mesmo, utilizando-se de uma linguagem concisa para se expressar matematicamente.

Quadro 2: Problema aplicado em pesquisa, intitulado por "Problema dos Irmãos" (LAIER, 2014).

Augusto tem três irmãos. Ele chega em casa, se dirige ao primeiro irmão e fala: ***- Se você dobrar o que eu tenho no bolso, dou-lhe 20 reais.*** **Seu irmão dobra o que ele tem no bolso e João lhe dá os 20 reais, parte para o segundo irmão e fala:** ***- Se você dobrar o que eu tenho no bolso, dou-lhe 20 reais.*** **Seu irmão dobra o que ele tem no bolso e João lhe dá os 20 reais, parte para o terceiro irmão e fala:** ***- Se você dobrar o que eu tenho no bolso, dou-lhe 20 reais.*** **Seu irmão dobra o que ele tem no bolso e João lhe dá os 20 reais e fica sem nada no bolso.** **Pergunta:** **Como pode ele dobrar 3 vezes o que tinha no bolso e acabar sem nada?**

Fonte: Adaptado de http://manthanos.blogspot.com.br/2011/12/o-problema-dos-tres-santos.html[9]

Para este problema, surgiram processos interessantes. Por exemplo:

> Se no último irmão, Augusto ficou com 'zero reais', isso significa que o que foi dobrado equivalia a vinte reais, e então posso dizer que ele chegou para esse irmão com dez reais no bolso. Esses dez reais foi o que sobrou do segundo irmão, e então podemos dizer que o segundo irmão ao dobrar o valor fez com que Augusto ficasse com trinta reais, o que indica que tinha sobrado quinze reais da conversa com o primeiro irmão, e somando com vinte reais que ele deu, significa que o dobro da primeira quantia era de trinta e cinco reais, o que pode me indicar o seguinte... (transcrição da fala de João).

[9] Este problema foi adaptado do "problema dos três santos", exposto no Blog Manthanos.

Esta fala foi feita pelo aluno, durante os encontros da pesquisa, e após apresentar verbalmente este raciocínio, João registrou a partir de uma expressão algébrica, o seguinte:

$$2x - 20 = 15$$

$$x = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

Para este problema, João percebeu e realizou cálculos aritméticos mentalmente, e expressou algebricamente somente parte de sua resolução.

Paula e Mateus, manifestaram ter tido dificuldades em entender o problema com a interpretação dos dados. Paula organizou os registros (figura 1) da seguinte maneira:

	tinha	dobro	deu	ficou
1	17,5	35	20	15
2	15	30	20	10
3	10	20	20	0

Figura 1: Resolução de Paula para o problema dos irmãos.
Fonte: dados produzidos durante encontro com Paula, transcritos para a pesquisa (LAIER, 2014).

Paula começou preenchendo as linhas e colunas do último para o primeiro valor usando a estratégia de resolver do final para o começo, operando mentalmente em todos os cálculos, e dispensando a utilização de expressões algébricas.

Mateus procurou atribuir valores aleatórios, e no início buscou resolver por tentativa e erro. Mas ao perguntar "posso resolver de trás para frente ou tenho que demonstrar com álgebra? " Foi dito a ele que poderia resolver da forma que achasse conveniente, e assim ele apresentou uma resolução muito semelhante à de Paula.

Mariana resolveu tudo mentalmente, e somente depois fez o registro na folha do problema (figura 2). Ela não utilizou expressões algébricas, e sua resposta foi apresentada na forma de passos explicativos de como havia pensado para resolver o problema, já indicando desde o começo o valor inicial que era a resposta ao problema. Ao ser questionada se poderia ter resolvido por meio de algum recurso algébrico, ela afirmou o seguinte: “eu até poderia, mas iria dar muito mais trabalho, e sempre prefiro ir pelo caminho mais fácil” (transcrição da fala de Mariana). Apesar de não ter usado a notação algébrica como recurso, operou com o equacionamento de alguns valores e tentou mostrar em sua resposta que o resultado estava condicionado a uma regra.

Augusto + A + B + C
Inicialmente Augusto tinha R$ 17,50 . 2 = 35,00
Tirando 20 = 15,00 com esses 15 dobrou e obteve 30,00 tirando 20 = 10,00 dobrou esse valor de novo 10 . 2 = 20 retirou 20,00 ficou sem nada.

Pois a ordem ao qual resolvemos um problema influencia seu resultado, ao mesmo tempo em que ele dobra o valor ele também retira.

Figura 2: Resolução apresentada por Mariana para o problema dos irmãos.
Fonte: dados produzidos durante encontro com Mariana, transcritos para a pesquisa (LAIER, 2014).

Pedro, Douglas e Valter, por meio de expressões algébricas com incógnitas (figuras 3 – resolução de Pedro, 4 – Resolução de Douglas) para representar os valores desconhecidos, resolveram o problema. Perceberam um padrão e fizeram as representações por meio de cálculos algébricos, sem dificuldade.

$2x - 20 = y$
$2y - 20 = z$
$2z - 20 = 0$

$2z = 20$
$\boxed{z = 10}$

$2y - 20 = 10$
$\boxed{y = 15}$
$2x - 20 = 15$
$2x = 35$
$\boxed{x = 17{,}50}$

Tendo 17,50 reais no bolso

Figura 3: Resolução apresentada por Pedro para o problema dos irmãos.
Fonte: dados produzidos durante encontro com Pedro, transcritos para a pesquisa (LAIER, 2014).

Pedro elaborou sua resolução pautada em operações algébricas, em que adotou o uso das letras como incógnitas que representavam os valores desconhecidos. Por meio de transformações algébricas, realizou substituições, chegando então ao valor inicial.

Douglas e Valter utilizaram expressões algébricas, assim como Pedro, apresentando o mesmo processo para resolver, com substituição das incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 20 = b \rightarrow 2a = 35 \rightarrow a = \dfrac{35}{2} = 17{,}5 \\ 2b - 20 = c \rightarrow 2b = 30 \rightarrow b = 15 \\ 2c - 20 = 0 \rightarrow c = 10 \end{array}\right| \rightarrow \quad a = \underline{\lfloor 17{,}5}$$

Figura 4: Resolução apresentada por Douglas para o problema dos irmãos (LAIER, 2014).
Fonte: dados produzidos durante encontro com Douglas, transcritos para a pesquisa (LAIER, 2014).

Em síntese, este problema indicou que, ao possibilitar a resolução sem impor nenhuma condicionante, os sujeitos não precisaram necessariamente recorrer a cálculos algébricos por meio de equações. Entretanto, isso não indica que para Paula, Mariana e Mateus, não pôde ser evidenciado um pensamento algébrico. Eles mostraram ter organizado suas resoluções e recorrido a um processo aritmético que construiu a lógica da resolução; momento em que surge o pensamento algébrico, inserido na primeira dimensão, que usa conceitos e procedimentos para operações e generalizações de padrões aritméticos, tendo assim, a álgebra como aritmética generalizada. Neste aspecto, é admissível que ao discutirem a evolução do pensamento algébrico; Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) tratam de categorizar por fases em que, cada uma delas, avança para habilidades mais elaboradas e estruturadas. No quadro 4, pode ser observada uma organização do que foi identificado como aspecto do pensamento algébrico, presente nas resoluções.

Quadro 3: Organização dos aspectos do pensamento algébrico evidenciados no problema dos irmãos.

Sujeitos	Aspecto de Pensamento Algébrico revelados
Todos	Perceberam e tentaram expressar as estruturas aritméticas de uma situação-problema.
Pedro, Douglas e Valter	Interpretaram uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas.
Pedro, Douglas, João e Valter	Produziram uma coleção de expressões corretas, com a introdução de uma notação "literal/aritmética"; e com a produção de justificações para cada expressão criada.

Fonte: Laier (2014).

Assim, apesar de quatro dos sete sujeitos não terem esquematizado a resolução por meio de expressões algébricas, isso não indica a ausência de aspectos do pensamento algébrico, pois só o fato de expressarem estruturas aritméticas e operarem a partir de um processo inverso, já indica a existência da apropriação de técnicas algébricas.

No caso desse problema, em que todos resolveram e obtiveram uma resposta final, um aspecto importante foi que mesmo utilizando processos diferentes, os sujeitos tiveram a preocupação de organizar etapas e procedimentos, para que o problema fosse resolvido.

5. Considerações Finais

Neste estudo, tentou-se abarcar aspectos do pensamento algébrico, evidenciados a partir da resolução de problemas. A atividade desenvolvida exigiu diferentes habilidades algébricas de cada um e foi apresentada de maneiras diferentes. Assim, é conveniente observar que, a resolução de problemas se constitui em um caminho que permite a mobilização de recursos não só mecânicos.

Desta forma, Wielewski (2005) coloca que do ponto de vista da matemática, "o que se sobressai é a atividade cognitiva, que além de exigir diferentes habilidades matemáticas, utiliza vários instrumentos na resolução de problemas e maneiras diferentes de representá-los" (2005, p.361). Essas diferentes habilidades matemáticas não surgem de maneira tão simples. A adoção de exercícios e procedimentos mecânicos não proporciona esse desenvolvimento, pois geralmente atividades assim exigem habilidades específicas que fazem o aluno procederem com cálculos específicos.

Mas a resolução de problemas, aplicada com o objetivo de revelar maneiras diferentes de resolvê-los, pode ser considerada uma alternativa em potencial. Muitas são as vertentes que permitem uma discussão sobre a resolução de problemas para a Educação Matemática. O que é legítimo ressaltar é que neste estudo, a resolução de problemas foi tratada em uma linha que discute a aplicabilidade de conceitos e habilidades matemáticas; que comporta a valorização dos processos envolvidos, que no caso da álgebra, culminam em abstração e generalização.

Sobre quais habilidades algébricas os alunos demonstraram possuir, e suas estratégias mobilizadas ao resolverem problemas matemáticos; a resolução de problemas pode se configurar em uma ferramenta útil para fossem evidenciadas. Nos problemas discutidos, para o pensamento algébrico dos sujeitos, foi identificado um conjunto de afirmações a respeito de relações aritméticas. Assim, o pensamento algébrico, esteve presente no modo de pensar aritmeticamente, para os sujeitos que utilizaram operações aritméticas, números e relações de igualdades; no modo de pensar internamente, quando entendem o número como objeto simbólico; no modo de pensar analiticamente, em todos os momentos que trataram as incógnitas como dados dos problemas.

6. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CASTRO, T. F. C. *Aspectos do Pensamento Algébrico revelados por professores-estudantes de um curso de formação continuada em Educação Matemática.* 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade de São Paulo. São Paulo, 1998.

CHALOUH, L.; HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). In: *As ideias da Álgebra.* Tradução Hygino H. Domingues. 6reimp. São Paulo: Atual, 1995.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). *As ideias da Álgebra.* Tradução Hygino H. Domingues. 6 reimp. São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBROSIO, B. S. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. In: *II Seminário em Resolução de Problemas – SERP II*. Rio Claro, 2008. Disponível em: <http:// http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=serp2008/trabalhos> Acesso em 14 mai. 2013.

DANTE, L. R. *Formulação e Resolução de problemas de matemática*: teoria e prática. 1.ed. São Paulo: Ática, 2009.

LAKATOS, I. *A lógica do Descobrimento Matemático: provas e refutações*. Trad. de Nathanael C. Caixeiro. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1987.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. Um Estudo das Potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: *Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo,* 2005. Disponível em: http:<//www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte>. Acesso em 13 dez. 2013.

LAIER, S. S. dos S. *Álgebra e Aspectos do Pensamento Algébrico: um estudo com resolução de problemas na Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática – UFMT/Sinop*. 173f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT: Cuiabá, 2014.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. 1997. *Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI.* Coleção Perspectivas em Educação Matemática. Campinas, SP: Papirus, 1997.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* 2. ed. 1975. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimp. Rio Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. Números e Álgebra no currículo escolar. In: I. Vale; A. B.; L. F.; L. S.; P. C. (Eds.). *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores.* Lisboa. SEM-SPCE, p. 5-27, 2006. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte(Caminha).pdf> Acesso em 04 jul. 2007.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education.* Califórnia-USA, p. 537-551, 2007.

WIELEWSKI, G. D. *Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutestkii*. 407f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2005.