RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E GRÁFICOS DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Marciane Linhares Carlos[1]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Este trabalho apresenta um estudo sobre as relações entre coeficientes e gráficos da função quadrática em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, cujo foco é trabalhar nos registros de representações gráficas e algébricas, analisando assim, as percepções dos alunos referentes aos dois registros, já que, para os alunos, o processo de identificar os coeficientes ou encontrar a lei de formação a partir do gráfico não é algo trivial. Em um primeiro momento é apresentada a função quadrática e suas representações. Em seguida, aborda-se o uso de *softwares* dinâmicos, justificando assim a utilização do *software* GeoGebra nas atividades propostas. Através dos registros feitos pelos alunos e observações, discute-se a problematização acerca das relações em questão.

Palavras Chaves: Educação Matemática. Função Quadrática. GeoGebra. Gráficos.

1 INTRODUÇÃO

O conteúdo de função quadrática, abordado de maneira tradicional, ou seja, quando é dada a lei de formação e a partir dela construir o gráfico, é, na maioria das vezes, bem aceito pelos alunos, pois estes não encontram grandes dificuldades em construir gráficos quando partem da função. O processo inverso, partir do gráfico para chegar na lei de formação ou identificar os coeficientes da função, não é óbvio para os alunos.

Pensando nestas questões, o objetivo deste artigo é trabalhar nos dois registros de representações (algébrica e gráfica) com uma turma de 28 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular da região metropolitana de Porto Alegre. São propostas atividades cujo foco é analisar quais são as percepções dos alunos referentes as relações entre os coeficientes e os gráficos da função quadrática.

Para tal análise faz-se necessário a compreensão dos sistemas de representações do objeto estudado como aponta os estudos de Duval (2009, 2011 e 2012).

Para a realização destas atividades foi utilizado um *software* dinâmico, o GeoGebra, cuja justificativa do uso de tecnologia na sala de aula foi baseada nos trabalhos de Borba (2010) e Gravina (2012).

É apresentada a metodologia, pesquisa e a análise dos resultados encontrados.

[1] Mestra em Ensino de Matemática. UFRGS. marciane.carlos@gmail.com

2 A FUNÇÃO QUADRÁTICA E SUAS REPRESENTAÇÕES

Um exercício envolvendo a função quadrática que os alunos resolvem sem grandes dificuldades é: dada a função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, faça o esboço do gráfico, ou então, dada a função faça o esboço do gráfico e marque seus pontos notáveis (raízes, vértice e ponto onde o gráfico "passa" pelo eixo das ordenadas). Outro exemplo de exercício é a situação-problema envolvendo a função quadrática onde, dadas informações sobre grandezas ou medidas, pede-se o esboço do gráfico, que muitas vezes os alunos cometem alguns equívocos ao desenhá-lo, como, por exemplo, em se tratando de unidades, estas não poderem ser negativas. Mas, acredita-se que a maior dificuldade dos alunos está em saber identificar cada um dos coeficientes da função quadrática e principalmente relacioná-los com o gráfico. O processo contrário, a partir do gráfico identificar os coeficientes é ainda mais complicado.

Duval (2009) em seus estudos mostra que grande parte dos alunos não consegue discriminar a forma de escrita que corresponde a um gráfico passando pela origem de outro que não passa e coloca que para haver esta discriminação "é preciso, com efeito, dar início a uma interpretação global que requer ter percebido os diferentes valores possíveis das variáveis visuais pertinentes no registro gráfico e tê-los relacionado com os símbolos correspondentes na escrita algébrica" (DUVAL, 1988, p.239-240 apud DUVAL, 2009, p.61).

A interpretação global a qual Duval (2011) refere-se em seus estudos é um dos três tratamentos das representações gráficas. Estas representações gráficas "não levam em conta os mesmos dados visuais do gráfico e não são guiadas pelo mesmo tipo de questão". (DUVAL, 2011. p.98). São elas: a abordagem ponto a ponto, utilizada quando se quer traçar o gráfico de uma função e é limitada aos pontos marcados no plano cartesiano; a abordagem de extensão do traçado efetuado, é puramente mental e se apoia em um conjunto infinito de ponto que estão nos intervalos entre os pontos marcados; e a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, onde o gráfico representa um objeto descrito pela função e, segundo o autor,

> A prática sistemática da abordagem ponto a ponto não favorece a abordagem de interpretação global que é em geral deixada de lado **no ensino** uma vez que depende de análise semiótica visual e algébrica. Compreende-se porque a maioria dos alunos fica aquém de uma utilização correta das representações gráficas.(DUVAL, 2011. p.99)

Este fato acontece porque, embora importante para o ensino/aprendizagem dos alunos, não é nada trivial para eles passar do registro de representação gráfica para a algébrica.

> A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes. Estes, frequentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes: a escrita algébrica de uma relação e sua representação geométrica sobre uma reta ou no plano, o enunciado de uma fórmula em francês e a escritura dessa fórmula sob forma literal etc. (DUVAL, 2009. p.18).

A passagem de uma representação a outra acontece espontaneamente quando estas são congruentes, ou seja, preenchem as seguintes condições:

> [...] correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada. (DUVAL, 2009. p.18).

Quando não há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, Duval (2012) observa um isolamento de registros de representação, ou seja, os alunos não reconhecem o mesmo objeto representado em sistemas semióticos diferentes.

Segundo os PCN’s (2000, p.42), deve-se “reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações”.

Para que este reconhecimento entre os registros de representações de um mesmo objeto seja feito optou-se por trabalhar com a representação gráfica em um *software* dinâmico.

3 O USO DE *SOFTWARES* DINÂMICOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Com o uso da tecnologia cada vez mais frequente em nossas vidas, necessita-se levar o uso das tecnologias para a sala de aula, pois já faz parte da vida dos alunos e não faria sentido deixar de usar as várias tecnologias disponíveis para fazer parte do processo de ensino/aprendizagem dos alunos.

A tecnologia mais frequência, e em especial em Educação Matemática, é o uso do computador, que “[...] deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, entender gráficos, contar, desenvolver noções espaciais etc”. (BORBA, 2010. p. 17)

Para Borba a informática é tão relevante no ambiente escolar que “Na escola, a alfabetização informática precisa ser considerada como algo tão importante quanto a alfabetização na língua materna e em matemática”. (BORBA, 2010, p. 87).

Ainda em relação a tecnologia:

> Coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concreto-abstratos.* São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais. (GRAVINA, 2012, p. 14).

Existem muitos objetos de aprendizagem e *softwares* matemáticos que auxiliam a entender os registros de representações de um objeto, o escolhido para este trabalho foi o GeoGebra porque "Um dos diferenciais deste programa em relação aos outros *softwares* de Geometria Dinâmica é o fato de se poder acessar funções, tanto via botões na Barra de Ferramenta, quanto pelo Campo de Entrada". (ARAÚJO, 2010, p.1). Outro motivo para utilizar este *software* é a aceitação do programa pelos alunos, pois estes já o utilizaram e gostaram dos recursos disponíveis pelo *software*.

4 AS ATIVIDADES PROPOSTAS

Com o objetivo de analisar quais são as percepções dos alunos referentes as relações entre os coeficientes e os gráficos da função quadrática nos registros de representações gráficas e da escrita algébrica, foram propostas duas atividades em que os alunos, em duplas, tiveram dois períodos de 45 minutos para realizá-las. É importante ressaltar que nesta fase dos estudos da função quadrática, os alunos já haviam trabalhado com situações-problemas envolvendo a função quadrática, onde era dada uma situação-problema e pedia-se a lei de formação; e também com exercícios onde era dada a função e pedia-se a construção do gráfico.

A primeira atividade consistia em digitar as funções no *software* e analisar as relações entre os coeficientes e o gráfico seguindo um roteiro de atividades, conforme abaixo:

Figura 1: Atividade solicitada aos alunos.

EXPLORANDO A FUNÇÃO QUADRÁTICA NO GEOGEBRA

Utilizando o *software*, construa o gráfico de cada uma das funções e complete o que se pede na tabela.

Função	Valor do coeficiente de x^2 **(a)**	Valor do coeficiente de x **(b)**	Valor do termo independente **(c)**	Concavidade	Valor da abscissa do ponto de inters. com o eixo x	Valor da ordenada do ponto de inters. com o eixo y
$y = 2x^2$						
$y = -x^2 + 3x$						
$y = x^2 - 4x + 3$						
$y = -x^2 + 6x - 8$						
$y = 3x^2 - 6$						
$y = 8 - 2x^2$						
$y = -6 + x + x^2$						

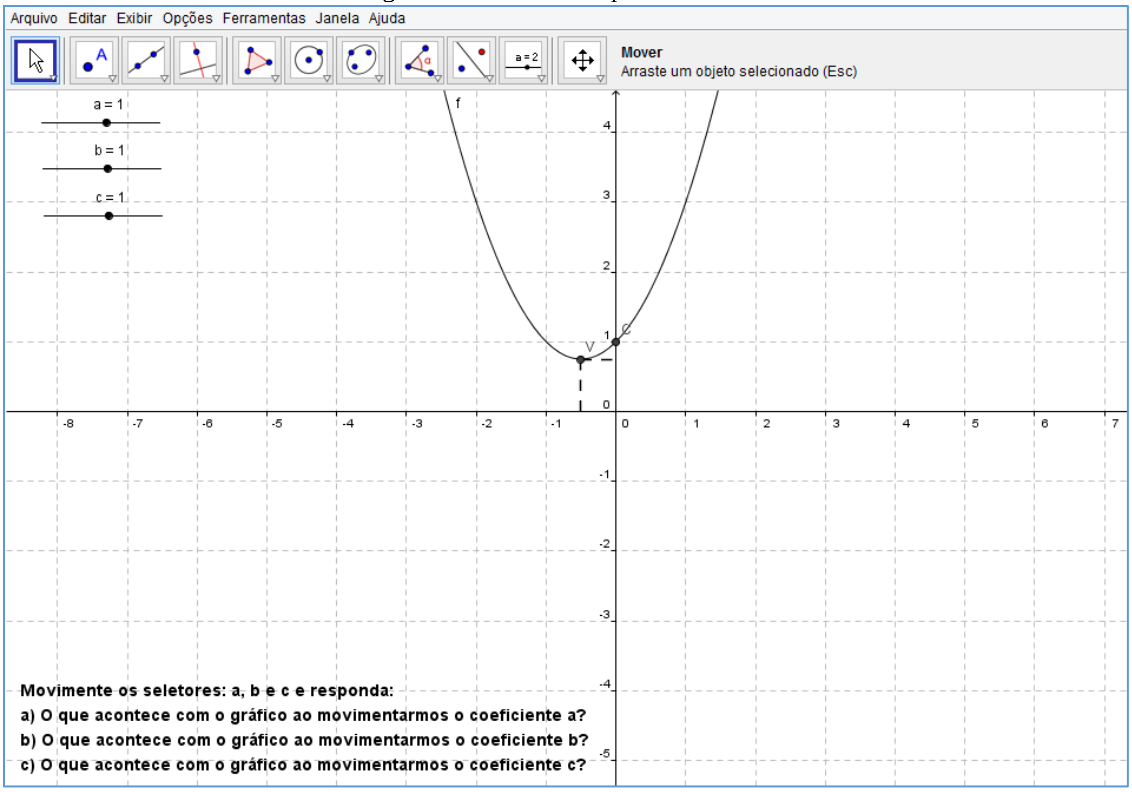
Responda as questões **1** ao 3 analisando a tabela.

1. Qual a relação entre o coeficiente **a** e a concavidade? Explique.
2. Qual a relação entre o coeficiente **b** e a intersecção do gráfico com o eixo y? Explique.
3. Qual a relação entre o termo independente **c** e o valor da ordenada do ponto de intersecção da curva com o eixo do y? Explique.
4. Utilizando o *software*, represente no mesmo plano cartesiano as funções $y = 2x^2$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ e $y = \frac{1}{2}x^2$ e comente sobre a conclusão geométrica que você pode fazer sobre a variação do coeficiente **a**.
5. Construa no mesmo plano cartesiano as funções $y = x^2$, $y = (x-2)^2$ e $y = (x+2)^2$. Conclua o que acontece com:
   a) O gráfico de $y = (x-2)^2$ em relação ao gráfico de $y = x^2$.
   b) O gráfico de $y = (x+2)^2$ em relação ao gráfico de $y = x^2$.
   c) As coordenadas dos vértices das três parábolas.

Fonte: Acervo Pessoal

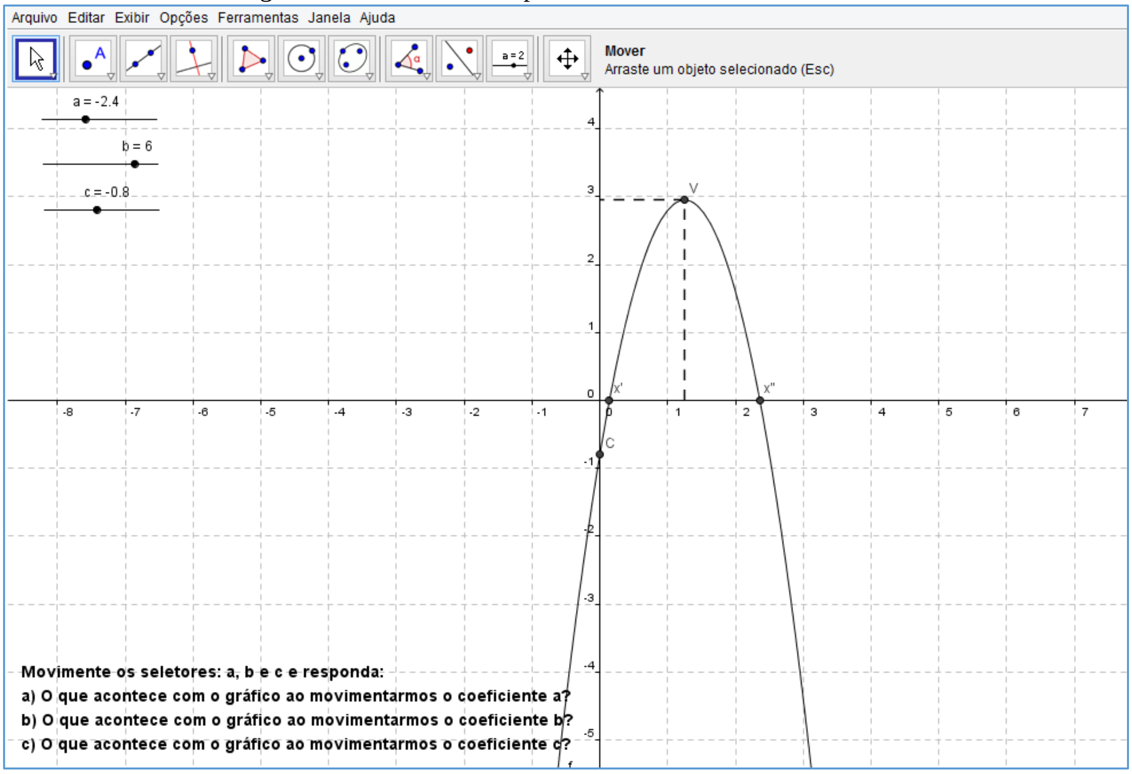
Na segunda atividade, foi dado aos alunos um gráfico pronto no GeoGebra (Figura 2). Este gráfico foi construído com a utilização da ferramenta “seletores”. Esta ferramenta permite movimentar o gráfico conforme os valores dos seletores, que representam os coeficientes da função quadrática. (Figura 3).

Figura 2: Gráfico dado para os alunos.



Fonte: Acervo Pessoal

Figura 3: Gráfico obtido a partir do movimento dos seletores.



Fonte: Acervo Pessoal

Foi solicitado aos alunos movimentarem os seletores e responderem as perguntas que estavam na tela do *software*. Tanto na primeira como na segunda atividade, os alunos registraram suas respostas em uma folha e entregaram para a professora.

Para a realização desta pesquisa, o método utilizado foi o qualitativo, pois

> [...] numa busca qualitativa, preocupamo-nos menos com a generalização e mais com o aprofundamento e abrangência da compreensão seja de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma política ou de uma representação. (MINAYO, 2004, p.102)

A análise dos dados que serão apresentados foi feita através de observação e dos registros escritos que os alunos fizeram e entregam.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na primeira atividade, era solicitado aos alunos que construíssem os gráficos no *software* e preenchessem a tabela, cujas funções eram dadas, com os valores dos coeficientes (a, b e c), se a concavidade da parábola estava voltada para cima ou para baixo, com os valores das abscissas do ponto de intersecção com o eixo x, e com o valor da ordenada do ponto de intersecção com o eixo y.

Nesta primeira parte da atividade os alunos não tiveram limitações em digitar as funções no GeoGebra e nem em completar a tabela, embora três alunos perguntaram se o valor do coeficiente de x^2 era 1 ou 0 na função $y = x^2 - 4x + 3$. Questionados sobre o que aconteceria com o x^2 se o coeficiente a fosse 1 ou 0, os alunos perceberam, analisando o gráfico e relembrando aulas anteriores, que se o coeficiente fosse 0 não haveria a função quadrática e que o 1 estava de forma implícita na função. Em seus estudos, Duval aponta para a falta de compreensão dos alunos quando existem unidades significativas em que os símbolos são omitidos como no caso do coeficiente 1 e que os professores precisam mostrar para os alunos estas unidades significativas, pois "o lembrete desta trivialidade é importante uma vez que se trata de fazer corresponder variáveis visuais pertinentes do gráfico com unidades significativas da expressão algébrica". (DUVAL, 2011, p.100).

Ainda em relação à tabela, duas duplas, chamadas de **A** e **B**, "inverteram" as respostas relacionadas à concavidade, onde seria correto responder que a concavidade seria voltada para cima, os alunos responderam que ela seria voltada para baixo e vice-versa. Outra dupla, a dupla **C**, completou a coluna da concavidade com "crescente" e "decrescente", colocaram decrescente onde a concavidade da parábola é voltada para cima e crescente onde a concavidade da parábola é voltada para baixo. A dupla **D** completou a coluna da concavidade com “máximo” e “mínimo”.

Na sequência, foi solicitado que os alunos respondessem a cinco perguntas, todas visando procurar relações entre os gráficos e com seus respectivos coeficientes.

Na questão 1, pedia para os alunos analisarem a tabela que completaram e se observaram alguma relação entre o coeficiente a e a concavidade da parábola. As quatro duplas, **A**, **B**, **C** e **D**, que completaram a coluna da concavidade equivocadamente, responderam que quando o coeficiente a é negativo, o gráfico tem concavidade voltada para cima e quando o coeficiente a é positivo, o gráfico tem concavidade voltada para baixo. Percebe-se que para estes alunos não houve congruência entre a representação de partida e a representação de chegada da qual Duval (2012, p.284) refere-se:

> Quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão é trivial e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código. Quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem à mente.

Na questão 2, era solicitado para, a partir da análise da escrita algébrica da tabela, observar se existia alguma relação entre o coeficiente b e a intersecção do gráfico com o eixo y, e explicar. Esta foi a questão em que os alunos mais precisaram da intervenção da professora para entender o que estava sendo solicitado. As duplas **A** e **B** escreveram que não existia nenhuma relação. A dupla **E** relacionou erroneamente o coeficiente b com os pontos de máximo e mínimo, escrevendo que se o b fosse negativo, o gráfico teria ponto de mínimo e se o b fosse positivo, o gráfico teria ponto de máximo. Outras duas duplas colocaram que se o b for zero, “não aumenta nem diminui”, e as demais duplas, explicaram corretamente a relação de crescimento/decrescimento/constância da intersecção do gráfico com o eixo y e o coeficiente b.

Na questão 3, pedia para analisar a tabela e escrever se existia alguma relação entre o termo independente, c, e o valor da ordenada do ponto de intersecção da curva com o eixo y e explicar. Todas as duplas responderam que os valores são iguais, cinco duplas escreveram “$c = y$” como justificativa.

Na questão 4, era solicitado aos alunos que representassem no mesmo plano cartesiano do *software* quatro funções da forma $y = x^2$ e que tirassem uma conclusão geométrica sobre a variação do coeficiente a. As duplas **A** e **B** relacionaram o coeficiente a com a concavidade voltada para baixo, assim como fizeram na questão 1, mostrando novamente que não houve congruência entre as representações e que "mudar a forma de uma representação se revela ser, para muitos alunos nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e, por vezes, mesmo impossível" (DUVAL, 2009, p.34). As duas **D** e **F** construíram uma tabela igual a que foi pedida para completarem e a completaram com as informações das quatro funções dadas na questão 4, mostrando que não entenderam o que foi solicitado. A dupla **C** respondeu que "quanto menor o valor de a menor a parábola". As demais duplas relacionaram corretamente o valor do coeficiente a com a amplitude da parábola.

Na questão 5, última deste momento da atividade, foi solicitado aos alunos que construíssem no GeoGebra, no mesmo plano cartesiano, três gráficos, $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$ e $y = (x + 2)^2$ e que os relacionassem com o gráfico $y = x^2$ e ainda indicassem as coordenadas dos vértices dos três gráficos. As duplas **A** e **B** escreveram que os gráficos se interceptavam e escreveram corretamente as coordenadas dos vértices. A dupla **C** escreveu que os gráficos eram crescentes e escreveu somente o vértice de uma parábola. A dupla **B** relacionou os gráficos com a concavidade e escreveu os vértices de maneira equivocada. As demais duplas relacionaram os gráficos com os seus respectivos deslocamentos horizontais e escreveram as coordenadas dos vértices da maneira correta.

Na segunda atividade, era solicitado aos alunos que, a partir do gráfico pronto no *software*, construído utilizando a ferramenta dos seletores, onde cada seletor representa um coeficiente, movimentassem os seletores mudando os valores dos coeficientes e relatassem o que acontecia com o gráfico. A ideia era de explorar a parte gráfica a partir dos movimentos dos coeficientes, levando em consideração que

> *A discriminação das unidades significantes próprias a cada registro deve então fazer o objeto de uma aprendizagem específica.* Ela é a condição necessária para toda atividade de conversão e, em seguida, para o desenvolvimento da coordenação dos registros de representação. (DUVAL, 2012, p.100).

Em relação ao coeficiente *a*, a maioria das duplas respondeu que muda a concavidade, não especificando que tipo de mudança era essa. Apenas três duplas mencionaram a relação entre o valor do coeficiente a e a amplitude da parábola.

Em relação ao coeficiente *b*, quatro duplas, **A**, **B**, **H** e **I**, relacionaram o coeficiente *b* com o vértice, respondendo que ao mudar este coeficiente estão alterando o vértice. As demais duplas escreveram que, ao mudar o valor do coeficiente *b* de positivo para negativo, ou vice-versa, o gráfico desloca-se verticalmente. Os alunos não sabiam como identificar o coeficiente *b* no gráfico, precisando da intervenção da professora para compreenderem.

Com relação ao coeficiente *c*, as duplas **A**, **B** e **I** escreveram que mudando o valor deste coeficiente, mudava o valor do termo independente. As outras duplas relacionaram o coeficiente *c* com deslocamento vertical do gráfico.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se a dificuldade dos alunos em interpretar o que está sendo solicitado, às vezes é por falta de atenção por parte dos alunos que isso acontece. Nota-se também a dificuldade dos alunos em, a partir do gráfico, identificarem a relação do gráfico com seus respectivos coeficientes, como solicitado na segunda parte da pesquisa. Esta dificuldade não foi encontrada ao relacionar o coeficiente com a representação algébrica, como pode-se perceber ao completarem a tabela na primeira parte da pesquisa.

Foi notória a falta de compreensão da relação do coeficiente *b* com o gráfico, os alunos precisaram da intervenção da professora para entender como identificar este coeficiente no gráfico.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. A**prendendo matemática com o geogebra.** São Paulo: Editora Exato, 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.**4 ed. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação.Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

DUVAL, Raymond. **Simiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais (SémiosisetPenséehumaine: Registres Sémiotiques et apprendissagesIntellectuels): (fascículo I).** Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Gráficos e equações: a articulação de dois registros.** REVEMET, Eissn 1981-1322, Florianópolis (SC), v.6, n.2, p.96-112, 2011.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v.07, n.2, p.266-297, 2012.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. **Mídias digitais na Educação Matemática.** In: Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática / organizadores Maria Alice Gravina...[et al.] Porto Alegre: Evangraf, 2012.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento:** pesquisa qualitativa em saúde. 8.ed. São Paulo: Hucitec, 2004.