



# VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA

ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil.

04, 05, 06 e 07 de outubro de 2017

Minicurso

## EXPLORANDO A GEOMETRIA ESPACIAL COM GEOGEBRA

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar<sup>1</sup>

### Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação a Distância

**Resumo:** Este minicurso pretende apresentar propostas de atividades para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial com o uso do GeoGebra. A complexidade dos objetos matemáticos e a complexidade do processo de ensino e aprendizagem são duas das razões para que o uso de tecnologias contribuem para melhor aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Para cada atividade proposta neste minicurso, será apresentado seus objetivos e aspectos de uma base teórica para analisar a viabilidade de sua aplicação na prática de cada participante em diferentes contextos de trabalho. No texto desta proposta são apresentados alguns aportes teóricos que estarão presentes no desenvolvimento das atividades. Para os participantes do evento, é importante ter um momento para refletir sobre as atividades propostas e também compartilhar suas experiências no estudo da Geometria, em particular com o uso de tecnologias.

**Palavras Chaves:** Geometria Espacial. GeoGebra.

### INTRODUÇÃO

As orientações que serão apresentadas neste minicurso se referem à importância de trabalhar alguns conceitos de Geometria Espacial para introduzir os alunos num mundo tridimensional, relacionado diretamente com o cotidiano e problemas práticos do dia a dia.

Iniciamos com as recomendações dos PCN (1998):

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente (p.51).

Em consonância com os PCN e como proposta para reflexão do professor, a Proposta Curricular de São Paulo (SÃO PAULO, 2008) prevê que:

Em Geometria, o Ensino Fundamental deve ocupar-se inicialmente com o reconhecimento e com a representação e classificação de formas planas e espaciais. É importante que se atente para a necessidade de incorporar o trabalho com a geometria em todos os anos da grade escolar, cabendo ao professor a escolha da distribuição mais conveniente dos conteúdos nos bimestres, assim como o viés que será dado ao tratamento dos temas da geometria. (p.45)

---

<sup>1</sup> Doutora em Matemática. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. E-mail: abarcaap@pucsp.br

Esperamos que, com o desenvolvimento deste minicurso e de acordo com a temática proposta, alguns objetivos sejam alcançados, em especial a compreensão por parte dos participantes que:

- O professor, nos dias atuais, deve desenvolver seu trabalho na escola fazendo uso de recursos tecnológicos para dar suporte às suas atividades e assim sua formação deve ser contínua e acompanhar o desenvolvimento das tecnologias.
- É essencial que o professor conheça estratégias de ensino e aprendizagem que possibilitem ao aluno independência para que possa desenvolver seus próprios mecanismos de conjecturas e resolução de problemas com o uso de programas computacionais específicos em especial o GeoGebra.
- É importante, também, conhecer teorias e pesquisas que dêem suporte a essas estratégias e possam servir de alicerce para a prática docente deste professor.

A atividade de ensinar é altamente complexa e se apoia em diversos tipos de conhecimento entre os quais o conhecimento sobre o desenvolvimento da aprendizagem do aluno e o conhecimento sobre a metodologia e do assunto a ser ensinado.

### **APORTES TEÓRICOS PARA A GEOMETRIA**

Pierre Van Hiele (1986), um pesquisador holandês, considera que a visualização é de grande importância no processo de construção do conhecimento geométrico, sendo que a representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal (síntese) das propriedades geométricas, são passos necessários para o entendimento da formalização de um conceito.

Van Hiele (1986) observou que os alunos pareciam progredir no raciocínio geométrico por meio de uma sequência, disposta em cinco níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor e que o desenvolvimento intelectual do aluno se dá de forma sequencial sem a omissão de nenhuma etapa, pois a quebra na sequência do raciocínio acarretaria uma estagnação no caminhar. Em estudos mais modernos, os três últimos níveis (dedução informal, dedução formal e rigor) foram condensados em apenas um nível, a síntese.

Considerando que os níveis de compreensão de Van Hiele (1986) foram desenvolvidos para o ensino da Geometria em geral e que em Geometria Espacial, o aprendizado sobre um conceito está aliado principalmente à visualização e a percepção das figuras, Gutiérrez (1992) observa que no uso do modelo de Van Hiele, na Geometria em três dimensões, é importante diferenciar o processo de

visualização espacial daquele relacionado aos sólidos (poliedros, etc.) e suas propriedades. Ambos estão relacionados, mas cada um tem suas próprias características.

Segundo o autor em um processo de aprendizagem da Geometria Espacial é necessário distinguir entre:

- Adquirir e usar o que é geralmente conhecido em Geometria Espacial como conhecimento e classificação dos vários tipos de sólidos, em particular os poliedros, suas estruturas, elementos, propriedades geométricas e de medida, etc. para resolver problemas, ou seja, entendimento dos conceitos geométricos e,
- Adquirir e desenvolver habilidades espaciais que estão presentes em atividades direcionadas para a aprendizagem e uso da Geometria Espacial, ou seja, um conjunto de habilidades espaciais para representar, transformar, gerar e utilizar informação não linguística, de acordo com a visualização espacial.

Medalha (1997) apresenta em seu trabalho uma adaptação dos níveis de compreensão de Van Hiele (1986) para o ensino da Geometria Espacial, como podemos observar no quadro abaixo:

Quadro 1. Classificação dos níveis para Geometria Espacial (MEDALHA, 1997. p.26)

Visualização	Manuseio de sólidos geométricos; percepção dos sólidos geométricos através de sua aparência física; reconhecimento das figuras pela sua forma, como um todo, e não pelas propriedades.
Análise	Descrição das propriedades dos sólidos; análise das propriedades das figuras.
Síntese	Estabelecimento de relações entre as propriedades e de uma ordem lógica entre figuras e relações, fazendo com que acompanhem uma dedução simples. Não há a compreensão de uma prova completa.
Dedução	Dedução de propriedades e realização de demonstrações; compreensão do significado da dedução e o papel dos diferentes elementos na estrutura dedutiva.
Rigor	Desenvolvimento do trabalho em diferentes sistemas axiomáticos; capacidade de deduções

	abstratas; possibilidade de compreensão da Geometria não-Euclidiana.
--	--

Ainda sobre o tema Geometria Espacial há dificuldades em abstrair algumas propriedades dos sólidos quando apresentados em ambientes de duas dimensões (lousa, livro, apostila, etc.) e há perda de informações das propriedades dos objetos (SILVA, 2006, p.61). Entre as pesquisas que apontam essas dificuldades por parte dos alunos e professores podemos citar Medalha (1997) e Possani (2002).

Rommevaux (1997) aponta em suas pesquisas a importância da construção e manipulação de modelos concretos de sólidos geométricos, partindo da ideia de que na resolução de problemas de Geometria Espacial, são necessárias duas etapas que ocorrem de forma simultânea: “ver e raciocinar” (Rommevaux, 1997, p.38).

Esta autora refere-se à construção de maquetes, objeto físico manipulável e que o “tocar” pode representar um papel fundamental na construção do objeto matemático, não sendo suficiente somente a visão, como acontece no estudo das formas geométricas planas de objetos espaciais.

Uma proposta de investigação pode ser direcionada para identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com suas planificações. Esse descritor permite verificar as habilidades de o aluno quantificar as faces, as arestas e os vértices dos poliedros e reconhecer planificações dos sólidos geométricos. Essas habilidades podem ser avaliadas por meio de situações-problema contextualizadas, que envolvam a composição e decomposição de figuras espaciais identificando suas semelhanças e diferenças.

Trabalhamos, normalmente, segundo Gutiérrez (1992) em três contextos com objetos tridimensionais: manipulação de objetos físicos, manipulação de objetos tridimensionais representados na tela do computador ou desenhando e lendo tais representações no papel.

Bishop (1983) sugeriu dois aspectos do raciocínio espacial que seriam especialmente relevantes para aprendizagem da Geometria. O primeiro consiste na capacidade de interpretar informações figurais (IFI) e envolve a compreensão de representações visuais, ou seja, os objetos de visualização. O segundo refere-se à habilidade de processamento visual (VP) e envolve a manipulação e a

transformação das representações visuais e imagens, para além da tradução de relações presentes nas representações visuais observadas.

A teoria denominada de Registros de Representação Semiótica vem de Raymond Duval (2003) o qual salienta que para estudar a aquisição do conhecimento matemático deve-se considerar os vários registros de representação semiótica. Machado (2010) observa que:

A matemática trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando, para sua apreensão, o uso de uma representação. Nesse caso, as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos é bastante significativa, pois permite a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. (MACHADO, 2010, p. 169-170).

As representações de um conceito matemático são apenas uma parte do mesmo e, assim, o tratamento e a conversão das diferentes representações do conceito é que permitirão sua apropriação.

Para Duval (1988), no ensino e na aprendizagem da Geometria Espacial, estão envolvidos três tipos de processo que preenchem funções epistemológicas específicas, sendo os processos de visualização, de construção e de raciocínio. Esses tipos de processos cognitivos, para Duval (1988), podem ser desenvolvidos separadamente. Sendo assim, a visualização independe da construção, ou seja, o aluno consegue acessar as figuras, qualquer que seja a forma utilizada para sua construção.

Duval (1988) afirma que mesmo que a construção leve à visualização, o processo de construção depende somente da conexão entre as propriedades matemáticas e a limitação técnica dos instrumentos utilizados.

A tela do computador, apesar de bidimensional, possibilita a visualização da animação dos sólidos geométricos. Em particular, o software GeoGebra possibilita certo dinamismo das figuras, e o aluno pode, num clicar de botão, visualizar qualquer sólido geométrico e sua planificação permitindo não só a visualização como a exploração de suas propriedades e características.

Isso é possível no GeoGebra, pois todas as janelas (gráficas 2D e 3D, algébrica, CAS, Planilha) podem ser vistas ao mesmo tempo, permitindo a construção de um ambiente para possíveis conversões, pelos estudantes, de diferentes registros semióticos que podem ajudá-los para a apropriação de objetos matemáticos. Além disso, os movimentos dinâmicos são elementos-chave nas

variações simultâneas dos registros para a construção e associação dos significados matemáticos entre os conceitos propostos nas intervenções didáticas.

As considerações feitas sobre os trabalhos de pesquisas apresentados acima sugerem que, propostas de atividades para o ensino e aprendizagem de conteúdos da Geometria Espacial devam ser direcionadas para o entendimento de conceitos geométricos e para adquirir e desenvolver habilidades espaciais e assim, com as indicações acima, é que serão apresentadas as propostas de atividades.

### **METODOLOGIA**

As atividades se constituirão de uma sequência didática de exercícios para melhor desenvolvimento dos tópicos a serem trabalhados. O participante poderá esboçar gráficos no papel e, em seguida, fazer representação desses no GeoGebra. Serão explorados os diferentes registros dos objetos matemáticos nas janelas do GeoGebra. Durante a execução das atividades, o participante poderá fazer observações, conjecturas e conclusões a respeito dos temas tratados.

### **REFERENCIAS**

Bishop, A.J. **Space and geometry**. In LESH, R. & Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, pp. 175-203, 1983.

Brasil, Ministério de Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais (PCN)**. Brasília: Ministério da Educação, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>

Duval, R. Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. **Annales de Didactique et de sciences cognitives**. Vol. 1, IREM, Stransbourg, pp 57-74, 1988.

\_\_\_\_\_. **Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. In: MACHADO, S Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*. Campinas/SP: Papyrus. p.11-33, 2003.

Gutiérrez, A. Exploring the links between Van Hiele Levels and 3-dimensional geometry, **Structural Topology**, 18, 31-48, 1992.

Machado, S. D. A. (org.). **Educação Matemática. Uma (Nova) Introdução**. 3.ed. São Paulo: EDUC-Editora da PUC, 2010.

Medalha, V. L. L. **A Visualização no estudo da Geometria Espacial**. Dissertação de Mestrado, Universidade Sta. Úrsula, Rio de Janeiro, 1997.

Possani R. A. R. **Apreensões de Representações Planas de Objetos Espaciais em um Ambiente de Geometria Dinâmica**. Dissertação de Mestrado, São Paulo:PUC-SP, 2002.

Rommevaux M.P. L. **Le discernement des plans: um seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle**. Strausbourg, 1997.

SÃO PAULO, Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Ensino médio**. 2008, 60p

Silva, M. B. **A Geometria Espacial no ensino médio a partir da atividade Webquest: análise de experiência**. Dissertação de Mestrado, São Paulo:PUC-SP, 2006.

Van Hiele, P. **Structure and Insight: a Theory of Mathematics Education**, Academic Press, 1986.